

Per Jensen

**VORLESUNGSSKRIPT
MATHEMATIK A FÜR CHEMIKER
UND LEBENSMITTELCHEMIKER**

**BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
THEORETISCHE CHEMIE
April 2004**

Inhaltsverzeichnis

1	Elementare Vektorrechnung	5
1.1	Vektorielle Größen	5
1.2	Rechnen mit vektoriellen Größen	8
1.3	Die vektorielle Beschreibung von Geraden und Ebenen	13
1.4	Das Skalarprodukt (Punkt-Produkt)	15
1.5	Das Vektorprodukt (Kreuz-Produkt)	20
1.6	Das Spatprodukt	22
1.7	Die Gram-Schmidt-Orthogonalisierung	23
2	Elementare Theorie reeller Funktionen mit einer Veränderlichen	27
2.1	Zuordnung, Abbildung, Funktion	27
2.2	Elementare Funktionen der Grundausstattung	30
2.3	Konstruktion einer Funktion aus bereits bekannten Funktionen	36
3	Differentialrechnung bei reellen Funktionen mit einer Veränderlichen	48
3.1	Tangentenzerlegung	48
3.2	Tangentenzerlegung an einigen Beispielen	52
3.3	Allgemeine Eigenschaften der Ableitung - Differentiationsregeln	57
3.4	Höhere Ableitungen und Taylorreihen	63
3.5	Anwendungen der Ableitung	65
4	Funktionen mehrerer reeller Veränderlichen	73
4.1	Allgemeines	73
4.2	Partielle Ableitungen	76
4.3	Totales Differential	79
4.4	Implizite Darstellung einer Funktion einer Veränderlichen	81
4.5	Variablentransformation	82
5	Integration	85
5.1	Umkehrung der Differentiation	85
5.2	Grundlegende Integrationsregeln	89
5.3	Mittelwerte und Flächen	90
5.4	Integrationsverfahren	97
6	Fehlerrechnung	114
6.1	Fehlertypen	114

6.2	Mittelwert und Fehler der Einzelmessungen	114
6.3	Fehlerfortpflanzung	117

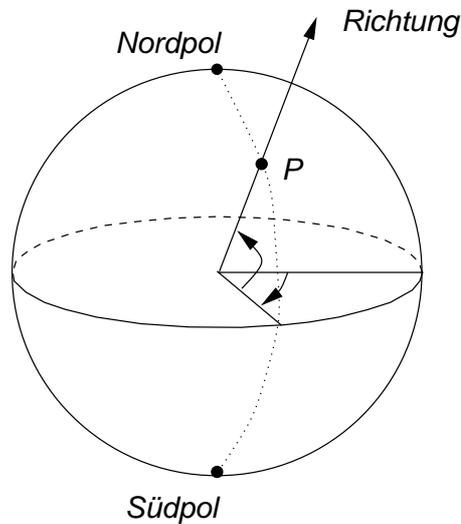


Abbildung 1.1: Eine Richtung im dreidimensionalen Raum. Der Durchstoßpunkt P wird durch Länge und Breite festgelegt.

1 Elementare Vektorrechnung

1.1 Vektorielle Größen

Anmerkung: "Zahlen" bedeuten, wenn nicht anders angegeben, "reelle Zahlen."

Beispiel:

Wir wollen im dreidimensionalen Raum eine Richtung festlegen. Wieviele Zahlenangaben sind nötig? Abbildung 1.1 zeigt, daß wir im allgemeinen zwei Zahlenangaben brauchen, nämlich Länge und Breite.

Definition: Eine zur Beschreibung benutzte Größe heißt *skalare* Größe, wenn zu ihrer Festlegung eine Zahlenangabe erforderlich ist.

Definition: Eine zur Beschreibung benutzte Größe heißt *vektorielle* Größe, wenn zu ihrer Festlegung mehrere Zahlenangaben erforderlich sind.

Daher ist die Richtung im dreidimensionalen Raum eine vektorielle Größe, da zu ihrer Festlegung zwei Zahlenangaben benötigt werden. Weitere Beispiele für vektorielle Größen sind Kräfte, Geschwindigkeiten, Impulse und Drehimpulse. Beispiele für skalare Größen sind die Masse und die Ladung eines Teilchens.

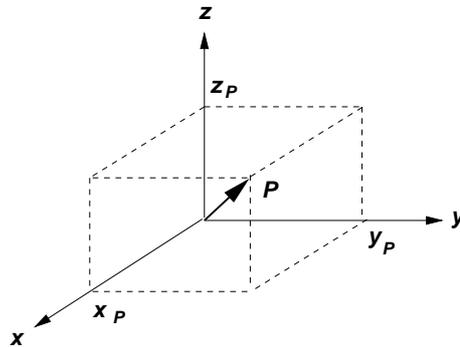


Abbildung 1.2: Der Punkt P wird durch die drei Koordinaten x_P, y_P und z_P beschrieben.

Die *Dimension* der vektoriellen Größe ist die Anzahl der notwendigen Zahlenangaben. Die Richtung im dreidimensionalen Raum ist also eine zweidimensionale Größe.

Beispiel:

In einem dreidimensionalen Kartesischen Koordinatensystem (das heißt, ein rechtshändiges Koordinatensystem mit senkrecht aufeinander stehenden Achsen mit gleichen Längeneinheiten) ist jeder Punkt des Raumes durch drei Koordinaten beschrieben, z.B. Punkt P durch x_P, y_P, z_P (siehe Abbildung 1.2). Entsprechend kann jedem Punkt ein Pfeil vom Ursprung zum Punkt P zugeordnet werden; die *Komponenten* des Pfeiles sind die drei Koordinaten x_P, y_P und z_P . Man schreibt

$$\vec{P} = (x_P, y_P, z_P) \quad (1.1)$$

und nennt \vec{P} *Ortsvektor*. Die Reihenfolge der Komponenten ist wichtig, da eine Vertauschung zu einem anderen Punkt führt.

Ein geordnetes zusammenfügen von

- 2 Zahlen (a_1, a_2) nennt man ein geordnetes Paar oder ein 2-Tupel.
- 3 Zahlen (a_1, a_2, a_3) nennt man ein Tripel oder 3-Tupel.
- n Zahlen $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ nennt man ein n -Tupel.

Bezeichnet man die Menge aller Punkte des dreidimensionalen Raumes mit E^3 , dann gibt es auch eine Menge V_0^3 von Ortsvektoren \vec{P}_O bezüglich des Ursprungs O , die die Punkte $P \in E^3$ beschreiben.

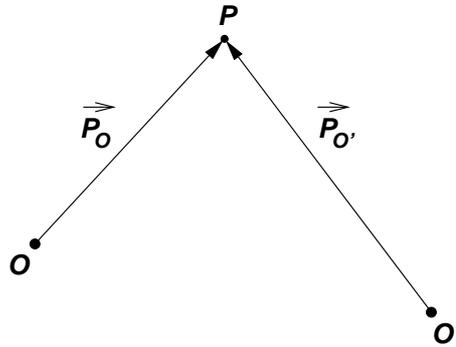


Abbildung 1.3: Gebundene Pfeile.

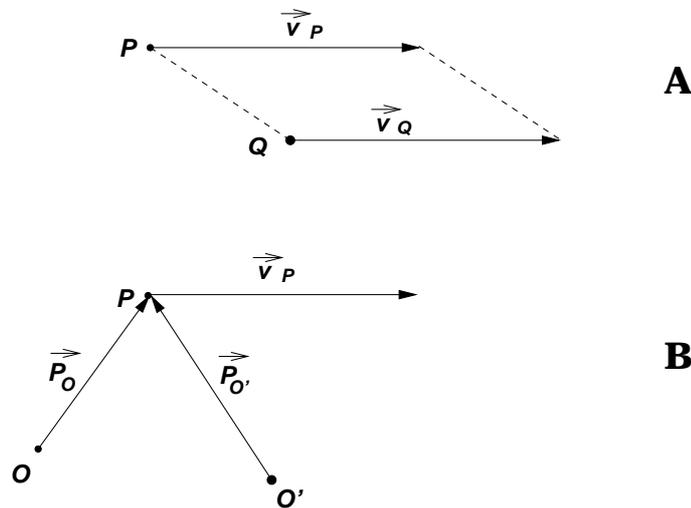


Abbildung 1.4: Freie Pfeile.

Bei Änderung des Ursprungs O (in O') wird der Punkt P durch einen anderen Ortsvektor $\vec{P}_{O'}$ beschrieben. Das heißt, diese Pfeile sind abhängig vom Ursprung, sogenannte *gebundene Pfeile* (siehe Abbildung 1.3).

Viele vektorielle Größen sind unabhängig vom Ursprung. Zum Beispiel ist die Geschwindigkeit eines Punktes durch die Richtung eines Pfeiles und dessen Länge gegeben. In der Abbildung 1.4A bewegen sich die beiden Punkte P und Q mit derselben Geschwindigkeit, wenn \vec{v}_P und \vec{v}_Q in Richtung und Länge übereinstimmen. Sie sind dann durch Parallelverschiebung ineinander überführbar.

Mit zwei verschiedenen Koordinatensystemen (Abbildung 1.4B) erhalten wir zwei verschiedene Ortsvektoren \vec{P}_O und $\vec{P}_{O'}$, aber einen von O und O' unabhängigen Geschwindigkeitsvektor. Solche vektoriellen Größen nennt man *freie Pfeile* und be-

zeichnet mit V^3 die Menge dieser parallel verschiebbaren Pfeile.

Anmerkung zur Kraft: Für die Auswirkung ist der Angriffspunkt natürlich wichtig, aber sie ist durch denselben Pfeil auch in verschiedenen Koordinatensystemen beschrieben. Die Kraft ist ein freier Vektor.

Verallgemeinerung: Die Menge aller möglichen n -Tupel von reellen Zahlen bezeichnet man \mathbb{R}^n mit $n \in \mathbb{N}$. Mit einem gegebenen Koordinatensystem läßt sich also ein Punkt

- in einem dreidimensionalen Raum durch Angabe eines Elementes aus \mathbb{R}^3 beschreiben;
- in einer zweidimensionalen Ebene durch Angabe eines Elementes aus \mathbb{R}^2 beschreiben;
- auf einer eindimensionalen Achse durch Angabe eines Elementes aus \mathbb{R}^1 beschreiben.

1.2 Rechnen mit vektoriellen Größen

Für die Menge der reellen Zahlen sind algebraische Verknüpfungen wie Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division bekannt.

Addition ist dabei ein Verfahren, das auf eindeutige Weise aus zwei Zahlen (mit festgelegter Reihenfolge) eine neue Zahl erzeugt. Das heißt, für $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$:

$$\alpha, \beta \xrightarrow{+} \alpha + \beta = \gamma$$

Zum Beispiel

$$2, 4 \xrightarrow{+} 2 + 4 = 6.$$

Es gelten für die Addition folgende Regeln:

- **Kommutativität:** $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.
- **Assoziativität:** $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.
- **Null-Existenz:** Es gibt eine Zahl $0 \in \mathbb{R}$ derart, daß $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$ ist.
- **Inversen-Existenz:** Es gibt eine Zahl $-\alpha \in \mathbb{R}$ derart, daß $\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$ ist. Kurz: $\alpha - \alpha = 0$.

Vektoraddition

Für Elemente aus \mathbb{R}^n definiert man in analoger Weise die *Vektoraddition*. Mit \vec{a} , \vec{b} , $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ haben wir

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n) \\ \vec{b} &= (b_1, b_2, b_3, b_4, \dots, b_{n-1}, b_n) \\ \vec{c} &= (c_1, c_2, c_3, c_4, \dots, c_{n-1}, c_n).\end{aligned}$$

Vektoraddition bewirkt

$$\vec{a}, \vec{b} \xrightarrow{+} \vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

mit der Rechenvorschrift

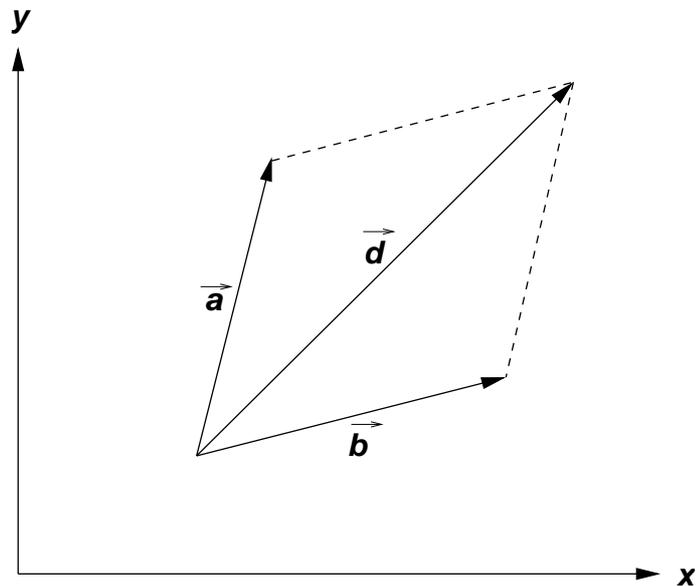
$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n) + (b_1, b_2, b_3, b_4, \dots, b_{n-1}, b_n) \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4, \dots, a_{n-1} + b_{n-1}, a_n + b_n) \\ &= (c_1, c_2, c_3, c_4, \dots, c_{n-1}, c_n).\end{aligned}$$

Die Vektoren werden also komponentenweise addiert.

Anmerkungen:

- Vektoraddition von \vec{a} und \vec{b} ist nur möglich, wenn die Dimensionen von \vec{a} und \vec{b} gleich sind.
- Zwei vektorielle Größen sind gleich, wenn sie komponentenweise gleich sind (also $a_1 + b_1 = c_1$, $a_2 + b_2 = c_2$, $a_3 + b_3 = c_3$, $a_4 + b_4 = c_4$, \dots , $a_n + b_n = c_n$).
- *Vorläufig* unterscheiden wir nicht zwischen vektoriellen Größen in Zeilen- oder Spaltenschreibweise. Wir schreiben $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n)$ oder

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Abbildung 1.5: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{d}$.

Beispiele für Vektoraddition

$(1, 2, -3) + (2, -2, 0) = (1 + 2, 2 + (-2), -3 + 0) = (3, 0, -3)$ oder

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

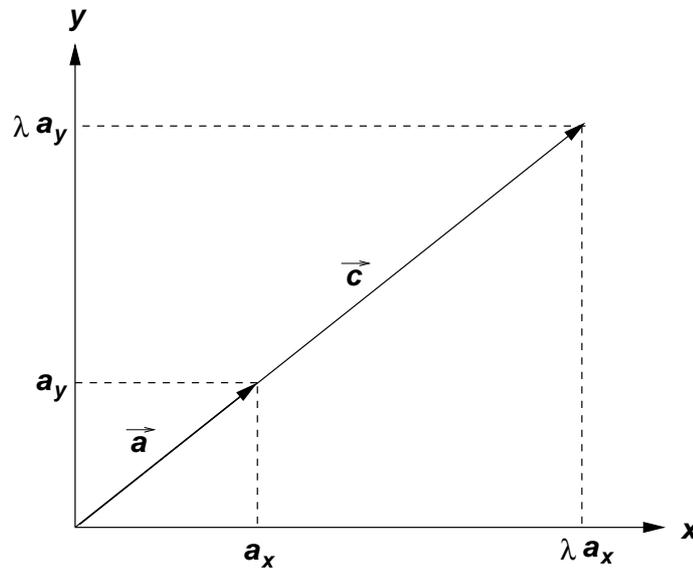
Unsinn ist zum Beispiel der Ausdruck $(1, 4) + (2, 5, -2)$.

Die Addition von Pfeilen

Die Addition von Pfeilen nach der Regel für Vektoraddition ist in Abbildung 1.5 für V^2 dargestellt. Die Addition $\vec{a} + \vec{b} = \vec{d}$ oder

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$

erzeugt den Pfeil \vec{d} , der als die Diagonale des Parallelogramms aus \vec{a} und \vec{b} gedeutet werden kann. Das Kräfteparallelogramm der Physik ist ein besonderes Beispiel dieses Prinzips. Im V^3 , das heißt in drei Dimensionen, ist analogerweise der Resultant $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ die Raumdiagonale im Parallelepiped der drei Vektoren \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} .

Abbildung 1.6: $\vec{c} = \lambda \vec{a}$.

Regeln für die Vektoraddition

Es gelten folgende Regeln, die alle durch Rückführung auf die Komponenten beweisbar sind:

- **Kommutativität:** $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
- **Assoziativität:** $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- **Null-Existenz:** Es gibt einen Vektor $\vec{0} = (0, 0, 0, 0, \dots, 0)$, so daß $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ ist.
- **Inversen-Existenz:** Es gibt $-\vec{a} = (-a_1, -a_2, -a_3, -a_4, \dots, -a_{n-1}, -a_n)$, so daß $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$ ist.

Damit ist auch die Subtraktion von vektoriellen Größen definiert.

Multiplikation einer vektoriellen Größe mit einem Skalar

Für V^2 , das heißt in zwei Dimensionen, ist das Prinzip der Multiplikation einer vektoriellen Größe \vec{a} mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ in Abbildung 1.6 dargestellt: $\vec{c} = \lambda \vec{a}$. Multiplikation eines Pfeiles mit einem Skalar $\lambda > 0$ gibt einen Pfeil gleicher Richtung der λ -fachen Länge. Die Koordinaten des von \vec{c} bezeichneten Punktes sind $(\lambda a_x, \lambda a_y)$. Für $\lambda < 0$ erhält man Pfeile entgegengesetzter Richtung. Pfeile gleicher

und entgegengesetzter Richtung heißen *kollinear*; sie gehen durch Multiplikation mit einem Skalar $\lambda \neq 0$ auseinander hervor.

Verallgemeinerung: $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wir definieren

$$\begin{aligned}\lambda \vec{a} &= \lambda (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n) \\ &= (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3, \lambda a_4, \dots, \lambda a_{n-1}, \lambda a_n),\end{aligned}$$

das heißt, jede Komponente wird einzeln mit λ multipliziert. Damit ist auch $0 \vec{a} = \vec{0}$.

Es gelten folgende Regeln, die alle durch Rückführung auf die Komponenten beweisbar sind:

- **Fast-Assoziativität:** $\alpha (\beta \vec{a}) = (\alpha \beta) \vec{a}$.
- **Distributivität:** $(\alpha + \beta) \vec{a} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a}$ und $\alpha (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$.

Anmerkungen

- Division einer vektoriellen Größe durch eine Zahl $\lambda \neq 0$ entspricht einer Multiplikation mit $1/\lambda$.
- Division durch eine vektorielle Größe ist *nicht* möglich.

Vektorräume

Gegeben ist eine Menge V mit Elementen $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \dots$. Man definiert zwei Verknüpfungen:

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= \vec{c} \\ \lambda \vec{a} &= \vec{d}, \quad \lambda \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Außerdem sollen die Regeln bezüglich Kommutativität, Assoziativität, Fast-Assoziativität und Distributivität erfüllt sein. Es muß ein Null-Element geben, und jedes Element muß ein inverses Element haben. Ein solches System heißt dann *Vektorraum*; seine Elemente sind *Vektoren*. Nicht alle geordneten n -Tupel sind Vektoren.

Die Motivation für die Einführung des Vektorraum-Begriffes ist, daß man Gesetzmässigkeiten für einen allgemeinen Vektorraum beweisen möchte. Dann genügt später der Nachweis, daß ein Vektorraum vorliegt und alle bewiesenen Regeln können übernommen werden.

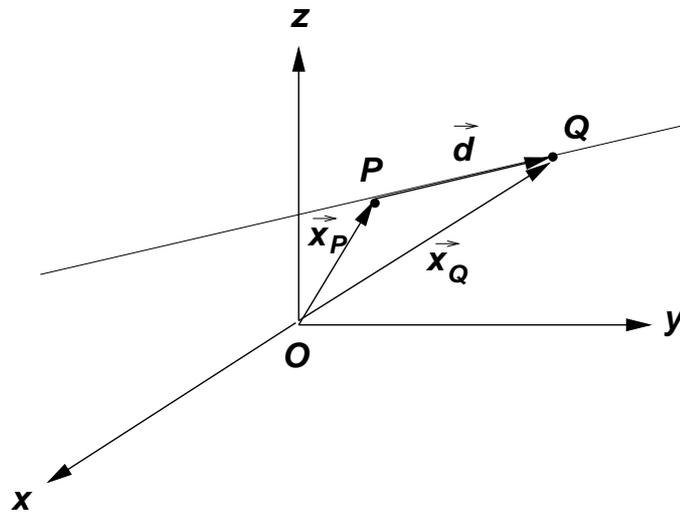


Abbildung 1.7: Die vektorielle Beschreibung einer Geraden.

1.3 Die vektorielle Beschreibung von Geraden und Ebenen

Geraden

Eine Gerade ist eine Teilmenge der Menge E^3 und enthält die Vektoren \vec{x}_g . Sie ist festgelegt durch zwei Punkte P und Q . Die Gerade ist vektoriell darstellbar durch einen Ortsvektor \vec{x}_P und einen Richtungsvektor \vec{d} auf der Geraden (Abbildung 1.7), dessen Vielfaches $\lambda\vec{d}$ zu \vec{x}_P addiert wird:

$$\vec{x}_g = \vec{x}_P + \lambda\vec{d}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

Diese Gleichung ist die *Punkt-Richtungsform der Geradengleichung*.

Wie erhält man \vec{d} ? Einfach als Differenz der beiden Ortsvektoren

$$\vec{x}_P + \vec{d} = \vec{x}_Q, \quad (1.3)$$

so daß

$$\vec{d} = \vec{x}_Q - \vec{x}_P \quad (1.4)$$

und

$$\vec{x}_g = \vec{x}_P + \lambda(\vec{x}_Q - \vec{x}_P), \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}, \quad (1.5)$$

ist. Diese Gleichung ist die *Zweipunkteform der Geradengleichung*.

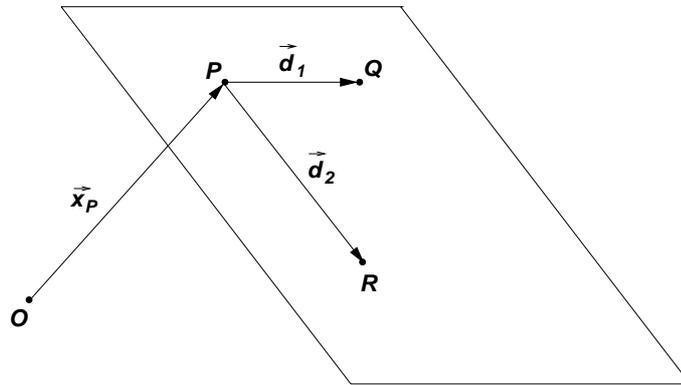


Abbildung 1.8: Die vektorielle Beschreibung einer Ebene.

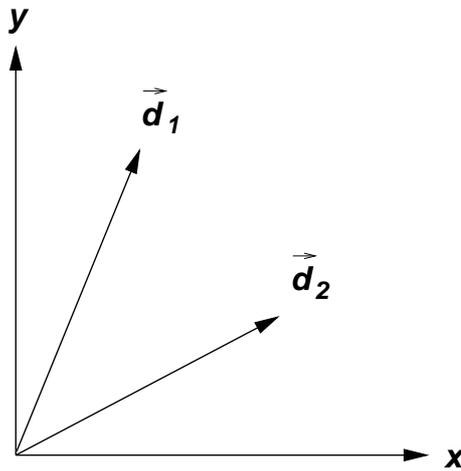


Abbildung 1.9: Linear unabhängige Vektoren.

Ebenen

Die Beschreibung einer Ebene ist analog zur Beschreibung einer Geraden (siehe Abbildung 1.8) mit

$$\vec{x}_E = \vec{x}_P + \lambda_1 \vec{d}_1 + \lambda_2 \vec{d}_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad (1.6)$$

bzw.

$$\vec{x}_E = \vec{x}_P + \lambda_1 (\vec{x}_Q - \vec{x}_P) + \lambda_2 (\vec{x}_R - \vec{x}_P), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad (1.7)$$

wobei \vec{x}_Q (\vec{x}_R) der Ortsvektor des Punktes Q (R) bezüglich zum Ursprung O ist.

Anmerkungen

- \vec{d}_1 und \vec{d}_2 dürfen nicht kollinear sein, also muß $\vec{d}_1 \neq \lambda \vec{d}_2$ sein. Man sagt auch, daß \vec{d}_1 und \vec{d}_2 *linear unabhängig* sein müssen.

Allgemein sind n Vektoren \vec{d}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) linear unabhängig, wenn die Gleichung

$$\lambda_1 \vec{d}_1 + \lambda_2 \vec{d}_2 + \dots + \lambda_n \vec{d}_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{d}_i = \vec{0} \quad (1.8)$$

nur dann erfüllt ist, wenn *alle* $\lambda_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) sind.

Im \mathbb{R}^n gibt es maximal n linear unabhängige Vektoren. Diese bilden eine n -dimensionale Basis (Basisvektoren). Haben wir zum Beispiel zwei linear unabhängige Vektoren $\vec{d}_1, \vec{d}_2 \in \mathbb{R}^2$ (Abbildung 1.9), läßt sich jeder weitere Vektor $\vec{d}_3 \in \mathbb{R}^2$ als

$$\vec{d}_3 = \lambda_1 \vec{d}_1 + \lambda_2 \vec{d}_2 \quad (1.9)$$

schreiben. Das heißt, ist $\vec{d}_3 \neq \vec{0}$, so ist die Gleichung

$$\lambda_1 \vec{d}_1 + \lambda_2 \vec{d}_2 - \vec{d}_3 = \vec{0} \quad (1.10)$$

für $\lambda_1 \neq 0$ und/oder $\lambda_2 \neq 0$ erfüllt.

- Es gibt beliebig viele Möglichkeiten, eine gegebene Ebene nach den Gln. 1.6 und 1.7 auszudrücken, je nach Wahl von P , Q und R .
- Man spricht auch von Geraden und Ebenen bei Vektoren im \mathbb{R}^n für $n > 3$, wenn Gleichungen analog zu den Gln. 1.2 und 1.5 oder analog zu den Gln. 1.6 und 1.7 vorliegen. Zum Beispiel definiert

$$\vec{x}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (1.11)$$

eine Gerade im \mathbb{R}^4 .

1.4 Das Skalarprodukt (Punkt-Produkt)

Jedem Paar beliebiger Elemente $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$, mit

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n) \\ \vec{b} &= (b_1, b_2, b_3, b_4, \dots, b_{n-1}, b_n), \end{aligned}$$

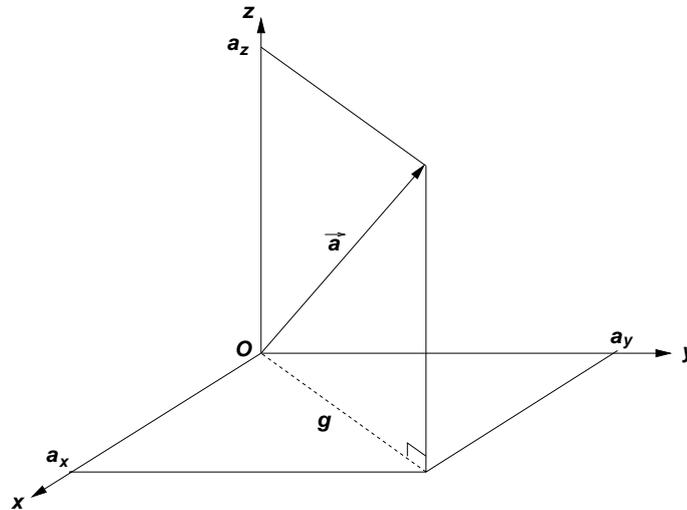


Abbildung 1.10: Die Länge eines Vektors.

ordnen wir eine Zahl, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ genannt, zu. Diese Zahl nennen wir das *Skalarprodukt*. Die Rechenvorschrift ist

$$\begin{aligned} \vec{a}, \vec{b} &\xrightarrow{\cdot} \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 + \dots + a_n b_n \\ &= \sum_{i=1}^n a_i b_i. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Beispiele sind

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 4$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) = 2.$$

Für $\vec{b} = \vec{a}$ tritt ein Sonderfall ein. Das Skalarprodukt ist

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 + a_4 a_4 + \dots + a_n a_n = \sum_{i=1}^n a_i^2. \quad (1.13)$$

Wir schreiben

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2. \quad (1.14)$$

Abbildung 1.10 gibt die geometrische Interpretation von $\vec{a} \cdot \vec{a}$ in \mathbb{R}^3 . Wir haben

$$a_x^2 + a_y^2 = g^2 \quad (1.15)$$

und

$$g^2 + a_z^2 = |\vec{a}|^2, \quad (1.16)$$

wobei $|\vec{a}|$ die Länge von \vec{a} bezeichnet. Also ist die Länge (oder der Betrag) von \vec{a} gegeben als

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (1.17)$$

Allgemein definiert man in \mathbb{R}^n

$$|\vec{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}. \quad (1.18)$$

Ein *Einheitsvektor* hat die Länge 1; man erhält aus jedem Vektor $\vec{a}' \neq \vec{0}$ den Einheitsvektor gleicher Richtung durch Division von $|\vec{a}'|$:

$$\vec{a} = \frac{1}{|\vec{a}'|} \vec{a}' = \frac{\vec{a}'}{|\vec{a}'|}. \quad (1.19)$$

Nehmen wir zum Beispiel $\vec{a}' = (1, 2, 3)$, so ist $|\vec{a}'| = \sqrt{14}$ und damit

$$\vec{a} = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right)$$

der Einheitsvektor in Richtung \vec{a}' .

Für $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1, \vec{b}_2 \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gelten folgende Regeln, die alle durch Rückführung auf die Komponenten beweisbar sind:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $\alpha (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b}$
- $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \cdot \vec{b} = \vec{a}_1 \cdot \vec{b} + \vec{a}_2 \cdot \vec{b}$
- $\vec{a} \cdot (\vec{b}_1 + \vec{b}_2) = \vec{a} \cdot \vec{b}_1 + \vec{a} \cdot \vec{b}_2$

Achtung: $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$ ist ein Skalar in Richtung von \vec{c} . Hingegen ist $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$ ein Skalar in Richtung von \vec{a} . Hier gilt also kein assoziatives Gesetz. Der Punkt “ \cdot ” zwischen zwei Vektoren hat eine andere Bedeutung als der Punkt “ \cdot ” zwischen einem Skalar und einem Vektor!

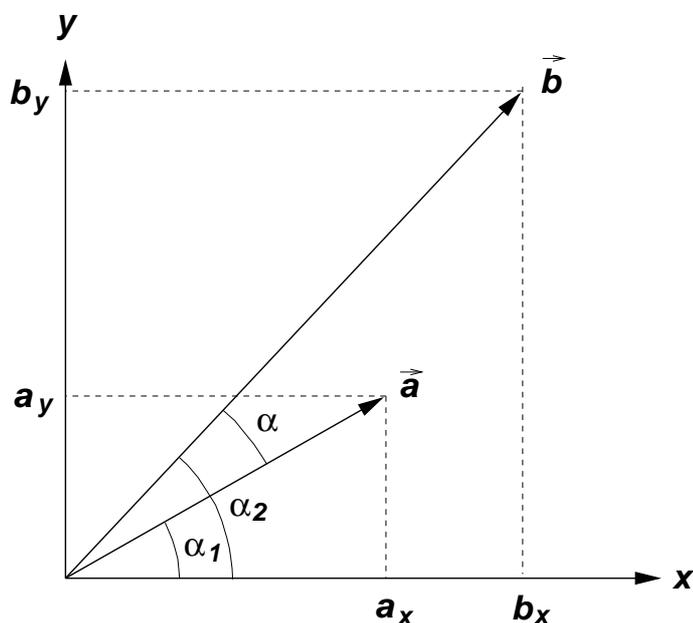


Abbildung 1.11: Die geometrische Interpretation des Skalarproduktes.

Haben wir $\vec{a} = \vec{0}$ oder $\vec{b} = \vec{0}$, dann ist $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Das Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

zeigt jedoch, daß wir aus $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ *nicht* $\vec{a} = \vec{0}$ oder $\vec{b} = \vec{0}$ folgern können. Was bedeutet also $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$?

In Abbildung 1.11 zeigen wir, wie das Skalarprodukt im \mathbb{R}^2 berechnet werden kann. Wir haben

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

wobei

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\vec{a}| \cos \alpha_1 \\ |\vec{a}| \sin \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\vec{b}| \cos \alpha_2 \\ |\vec{b}| \sin \alpha_2 \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_x b_x + a_y b_y \\ &= |\vec{a}| |\vec{b}| (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2) \\ &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\alpha_1 - \alpha_2) = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\alpha_2 - \alpha_1). \end{aligned} \quad (1.22)$$

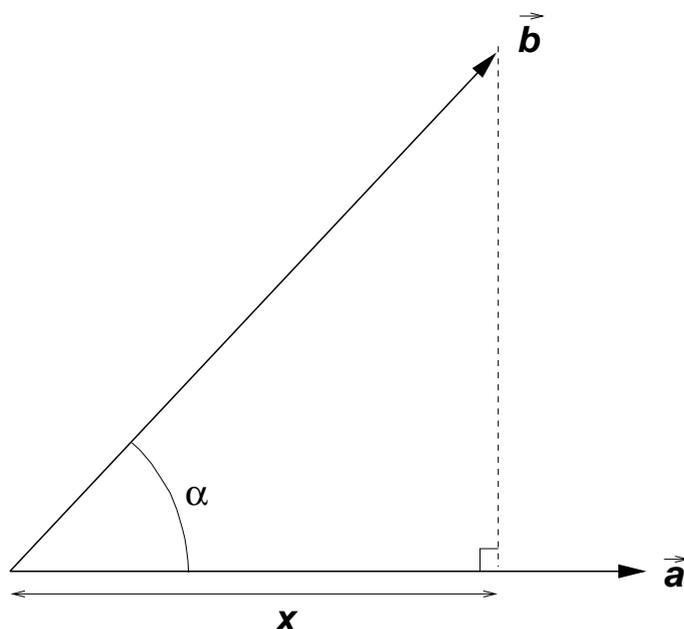


Abbildung 1.12: Die Projektion auf einen Einheitsvektor \vec{a} ($|\vec{a}| = 1$).

Wir haben mit $\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha$ genau den Winkel zwischen \vec{a} und \vec{b} (Abbildung 1.11). Das Endergebnis ist damit

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha. \quad (1.23)$$

Diese Beziehung gilt auch für dreidimensionale Vektoren im \mathbb{R}^3 . Für $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$ haben wir $|\vec{a}| > 0$ und $|\vec{b}| > 0$. In diesem Fall ist das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, wenn $\cos \alpha = 0$ ist. Dann ist $\alpha = \pm 90^\circ$, und die Vektoren \vec{a} und \vec{b} stehen senkrecht aufeinander. Diese geometrische Interpretation hat natürlich nur in \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 Gültigkeit. Ist für zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} in \mathbb{R}^n ($n > 3$) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, sagt man, daß \vec{a} und \vec{b} *orthogonal* zueinander sind.

Im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 gilt offensichtlich

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}. \quad (1.24)$$

Im besonderen Fall, wo \vec{a} ein Einheitsvektor ist (das heißt $|\vec{a}| = 1$), erhalten wir

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x = |\vec{b}| \cdot \cos \alpha \quad (1.25)$$

(siehe Abbildung 1.12). Das Skalarprodukt gibt also die *Projektion* (genannt x in Abbildung 1.12) von \vec{b} auf den Einheitsvektor \vec{a} wieder.

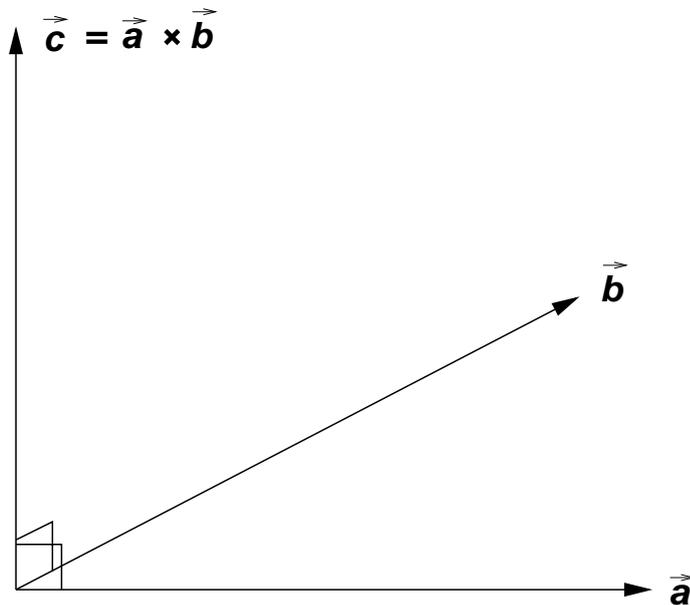


Abbildung 1.13: Der Vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf \vec{a} und \vec{b} .

1.5 Das Vektorprodukt (Kreuz-Produkt)

Achtung: Das Vektorprodukt ist für Vektoren der Dimension drei (\mathbb{R}^3) definiert!

Für $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ definieren wir

$$\vec{a}, \vec{b} \xrightarrow{\times} \vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

mit der Rechenvorschrift

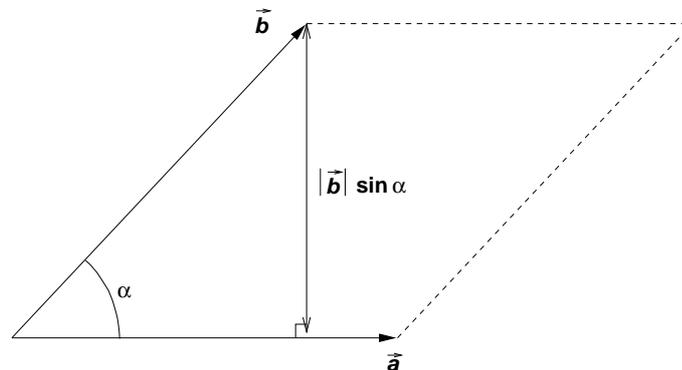
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \vec{c}. \quad (1.26)$$

Wir können unmittelbar berechnen, daß

$$\begin{aligned} \vec{c} \cdot \vec{a} &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) a_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) a_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) a_3 = 0. \end{aligned} \quad (1.27)$$

In analoger Weise berechnen wir, daß $\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$ ist. Der Vektor \vec{c} steht also senkrecht auf \vec{a} und \vec{b} (Abbildung 1.13).

Es gelten folgende Regeln, die alle durch Rückführung auf die Komponenten beweisbar sind:

Abbildung 1.14: Das von \vec{a} und \vec{b} aufgespannte Parallelogramm.

- $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$.
- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.
- $(\alpha \vec{a}) \times \vec{b} = \alpha (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\alpha \vec{b})$.
- $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.

Wir berechnen jetzt das Vektorprodukt der beiden Vektoren \vec{a} und \vec{b} in Abbildung 1.11, die jetzt als dreidimensionale Vektoren mit den Koordinaten

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

aufgefaßt werden. Die Koordinaten des Vektorprodukts sind

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}. \quad (1.29)$$

Mit Hilfe von Gln. 1.21 berechnen wir

$$\begin{aligned} a_x b_y - a_y b_x &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_2) \\ &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\alpha_2 - \alpha_1) = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\alpha_1 - \alpha_2). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Es folgt aus den Gleichungen 1.29 und 1.30, daß die Länge des Vektors $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$,

$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |a_x b_y - a_y b_x| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| |\sin \alpha| \quad (1.31)$$

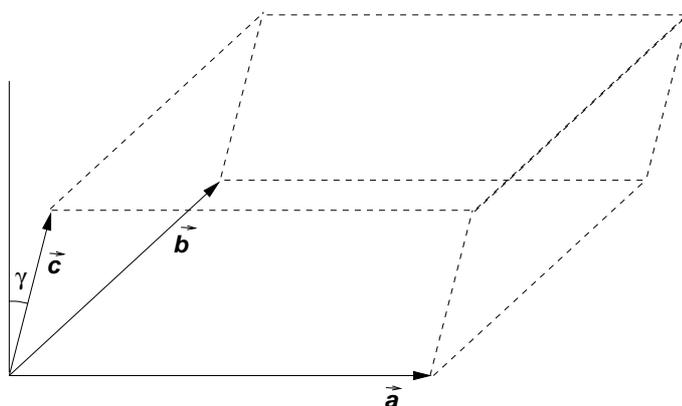


Abbildung 1.15: Das Spatprodukt.

ist, wobei $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ ist (Abbildung 1.11). Der Betrag von $\vec{a} \times \vec{b}$ entspricht dem Flächeninhalt des von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogramms (siehe Abbildung 1.14).

Wenn $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ ist, so ist auch $|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$. Für Vektoren $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$ kann $\vec{a} \times \vec{b}$ nur dann null sein, wenn $|\sin \alpha| = 0$ ist. Dann ist $\alpha = 0^\circ$ oder 180° , und die beiden Vektoren sind kollinear, das heißt $\vec{a} = \lambda \vec{b}$.

1.6 Das Spatprodukt

Für drei linear unabhängige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ definieren wir das *Spatprodukt*

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Das Spatprodukt ist eine Zahl. Der Absolutwert $|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$ ist das Volumen des Spats aus $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (Abbildung 1.15). Wir können dieses Ergebnis wie folgt beweisen:

1. $|\vec{a} \times \vec{b}|$ entspricht dem Flächeninhalt des von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogramms.
2. $|\vec{c}| \cdot \cos \gamma$ ist die Höhe des Spats (Abbildung 1.15).
3. Der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf dem von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogramm.
4. Das Spatprodukt ist gegeben als

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \gamma,$$

also das Produkt des Flächeninhaltes der Grundfläche und der Höhe des Spats. Der Betrag dieses Produktes ist das Volumen des Spats.

In Abbildung 1.15 bilden \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} ein *Rechtssystem*. Dieses ist der Fall, wenn ein Beobachter auf der Spitze von \vec{c} , der auf die von \vec{a} und \vec{b} aufgespannte Fläche schaut, eine Drehung von \vec{a} nach \vec{b} um den kleineren Winkel im Gegenuhrzeigersinn durchführen muß. In diesem Fall ist das Spatprodukt positiv und gleich dem Volumen des Spats. Bilden \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} ein *Linkssystem* (dieses ist der Fall, wenn \vec{a} , \vec{b} und $-\vec{c}$ ein Rechtssystem bilden), so ist das Spatprodukt negativ und $|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$ ist gleich dem Volumen des Spats.

Haben wir $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ und $\vec{c} \neq \vec{0}$, aber $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$, dann gilt

- \vec{a} und \vec{b} sind kollinear ($\vec{a} = \lambda \vec{b}$), so daß $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ ist, oder
- \vec{c} liegt in der von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Fläche. Es gilt dann

$$\vec{c} = \lambda_a \vec{a} + \lambda_b \vec{b}. \quad (1.32)$$

In diesem Fall steht \vec{c} senkrecht auf $\vec{a} \times \vec{b}$.

In beiden Fällen sind \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} linear abhängig. Das Spatprodukt ist nur dann ungleich null, wenn \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} linear unabhängig sind.

1.7 Die Gram-Schmidt-Orthogonalisierung

Wie bereits erwähnt gibt es im n -dimensionalen Raum \mathbb{R}^n maximal n linear unabhängige Vektoren. Betrachten wir als Beispiel \mathbb{R}^2 . Haben wir in \mathbb{R}^2 zwei linear unabhängige Vektoren \vec{e}_1 und \vec{e}_2 gefunden, können wir jeden beliebigen Vektor \vec{a} in \mathbb{R}^2 als *Linearkombination* von \vec{e}_1 und \vec{e}_2 schreiben:

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2. \quad (1.33)$$

Wir sagen, daß \vec{e}_1 und \vec{e}_2 einen *Basissatz* in \mathbb{R}^2 bilden, oder daß \vec{e}_1 und \vec{e}_2 *Basisvektoren* sind.

In Anwendungen der Vektorrechnung, zum Beispiel in der Quantenmechanik, werden Vektoren normalerweise als Linearkombinationen gewählter Basisvektoren ausgedrückt. Im \mathbb{R}^n können wir jeden Satz von n linear unabhängigen Vektoren als Basissatz benutzen; es gibt unendlich viele solcher Sätze. Jedes Paar nicht-kollinearer Vektoren (\vec{e}_1, \vec{e}_2) kann in \mathbb{R}^2 als Basissatz benutzt werden und es gibt offensichtlich unendlich viele solcher Paare. Nicht alle Basissätze sind aber gleich bequem für praktische Berechnungen. Betrachten wir wieder \mathbb{R}^2 als Beispiel. Der Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ ist in Gln. 1.33 gegeben; betrachten wir auch einen Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$:

$$\vec{b} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2. \quad (1.34)$$

Das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ist nun

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2) \cdot (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2) \\ &= a_1 b_1 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 b_2 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2.\end{aligned}\quad (1.35)$$

Dieser Ausdruck kann erheblich vereinfacht werden, wenn wir (\vec{e}_1, \vec{e}_2) als eine sogenannte *orthonormale* Basis wählen. Alle Basisvektoren einer orthonormalen Basis sind Einheitsvektoren, das heißt in unserem Fall $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 1$. Zusätzlich ist jeder Basisvektor orthogonal zu allen anderen Basisvektoren, das heißt in unserem Beispiel $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$. Im Falle einer orthonormalen Basis ist also

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2. \quad (1.36)$$

In Anwendungen der Vektorrechnung arbeitet man (fast) ausschließlich mit orthonormalen Basisvektoren, da alle Berechnungen sich dann einfacher gestalten. Im \mathbb{R}^n benutzt man also n Basisvektoren $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n)$, für die gilt $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = 1$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$), und $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$, wenn $i \neq j$ ist. Mit \mathbb{R}^2 als Beispiel werden wir hier zeigen, wie man ausgehend von zwei nicht-orthonormalen Basisvektoren (\vec{d}_1, \vec{d}_2) durch eine sogenannte Gram-Schmidt-Orthogonalisierung eine orthonormale Basis (\vec{e}_1, \vec{e}_2) konstruieren kann.

Wir haben also zwei nicht-kollinearen Vektoren $\vec{d}_1, \vec{d}_2 \in \mathbb{R}^2$, für die $\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_1 \neq 1$, $\vec{d}_2 \cdot \vec{d}_2 \neq 1$ und $\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 \neq 0$ ist. Ein beliebiger Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ kann als

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{d}_1 + \lambda_2 \vec{d}_2 \quad (1.37)$$

geschrieben werden.

Wir suchen zwei andere Basisvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in \mathbb{R}^2$, für die $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 1$, $\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 1$ und $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$ wird, damit wir den Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ als

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 \quad (1.38)$$

schreiben können.

Nach Gram und Schmidt wird der Vektor \vec{e}_1 durch *Normierung* von \vec{d}_1 erhalten:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{d}_1}{|\vec{d}_1|}; \quad (1.39)$$

damit ist \vec{e}_1 ein Einheitsvektor.

Um den Vektor \vec{e}_2 zu erhalten, berechnen wir zunächst

$$\vec{e}_2' = \vec{d}_2 - (\vec{e}_1 \cdot \vec{d}_2) \vec{e}_1. \quad (1.40)$$

Dann ist nämlich

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2' = \vec{e}_1 \cdot \vec{d}_2 - (\vec{e}_1 \cdot \vec{d}_2) \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_1 \cdot \vec{d}_2 - \vec{e}_1 \cdot \vec{d}_2 = 0, \quad (1.41)$$

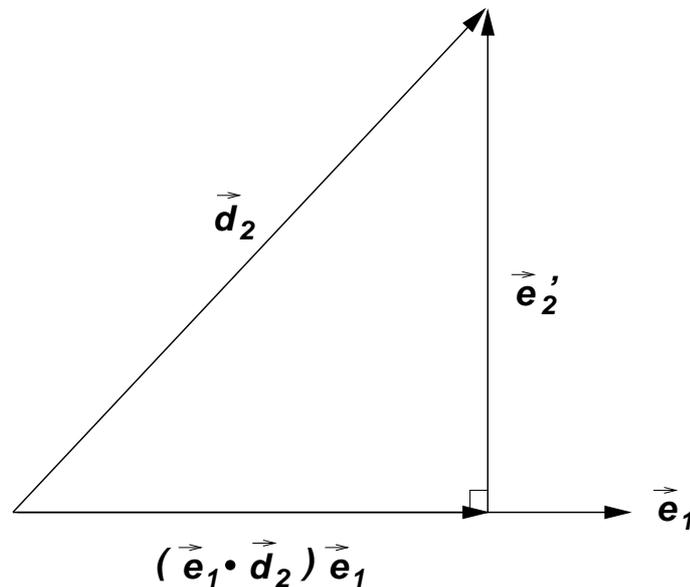


Abbildung 1.16: Die geometrische Interpretation der Gln. 1.40.

da $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 1$ ist. Definieren wir jetzt

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{e}_2'}{|\vec{e}_2'|} \quad (1.42)$$

so erhalten wir durch diese Normierung $\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 1$ und es gilt

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \frac{1}{|\vec{e}_2'|} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2' = 0. \quad (1.43)$$

Die beiden Vektoren \vec{e}_1, \vec{e}_2 erfüllen also $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 1$ und $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$. Sie sind also die gesuchte, orthonormale Basis.

Abbildung 1.16 gibt die geometrische Interpretation der Gln. 1.40. Da \vec{e}_1 ein Einheitsvektor ist, ist der Vektor $(\vec{e}_1 \cdot \vec{d}_2) \vec{e}_1$ die Projektion (Abbildung 1.12) von \vec{d}_2 auf \vec{e}_1 . Wenn dieser Vektor von \vec{d}_2 abgezogen wird, das heißt, $-(\vec{e}_1 \cdot \vec{d}_2) \vec{e}_1$ wird zu \vec{d}_2 addiert, bleibt der Vektor \vec{e}_2' übrig und dieser Vektor steht senkrecht auf \vec{e}_1 .

Hat man im n -dimensionalen Raum \mathbb{R}^n die n linear unabhängigen (aber nicht orthonormalen) Vektoren $(\vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3, \dots, \vec{d}_n)$, gestaltet sich eine Gram-Schmidt-Orthogonalisierung wie folgt:

Der Basisvektor \vec{e}_1 wird durch Normierung von \vec{d}_1 erhalten:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{d}_1}{|\vec{d}_1|}. \quad (1.44)$$

Dann wird für $i = 2, 3, 4, \dots, n$

- der Vektor \vec{e}'_i berechnet als

$$\vec{e}'_i = \vec{d}_i - \sum_{j=1}^{i-1} (\vec{e}'_j \cdot \vec{d}_i) \vec{e}'_j, \quad (1.45)$$

- und der Basisvektor \vec{e}_i wird durch Normierung von \vec{e}'_i erhalten:

$$\vec{e}_i = \frac{\vec{e}'_i}{|\vec{e}'_i|}. \quad (1.46)$$

Man kann sich in relativ einfacher Weise überzeugen, daß die Vektoren $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n)$ orthonormal sind.

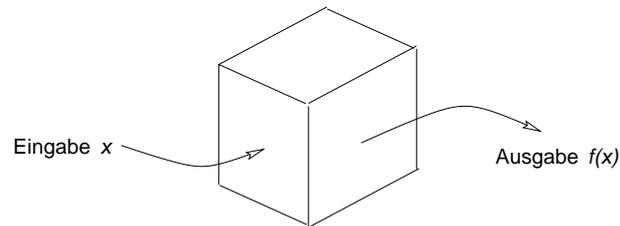


Abbildung 2.1: Das Prinzip eines “Zuordnungs-Automaten.”

2 Elementare Theorie reeller Funktionen mit einer Veränderlichen

2.1 Zuordnung, Abbildung, Funktion

Zuordnung: Man nimmt ein Objekt (oder mehrere) einer betrachteten Menge und ordnet diesem *auf eindeutige Weise* genau ein Element einer anderen (oder derselben) Menge zu. Man schreibt zum Beispiel

$$x \longmapsto f(x) \quad \text{oder} \quad (x_1, x_2) \longmapsto f(x_1, x_2)$$

Abbildung 2.1 zeigt das Prinzip eines “Zuordnungs-Automaten.” Für jede Eingabe x liefert der Automat eine Ausgabe $f(x)$. Die Funktionstasten eines Taschenrechners sind eine Verwirklichung dieses Prinzips. Eine andere graphische Darstellung einer Zuordnung findet sich in der Abbildung 2.2. Das obere Bild zeigt eine allgemeine Zuordnung. Das mittlere Bild zeigt die Situation, bei der zwei verschiedene Eingabedaten, $x_1 \neq x_2$, dieselbe Ausgabe $f(x_1) = f(x_2)$ liefern. Diese Zuordnung ist eindeutig. Das untere Bild zeigt die nichtzulässige Situation, wobei eine Eingabe x zwei verschiedene Ausgaben erzeugt. Eine solche Zuordnung ist nicht eindeutig.

Beispiele für Zuordnungen sind:

1. *Skalarprodukt.* Die Eingabe besteht aus zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ und die Ausgabe ist eine Zahl $\vec{a} \cdot \vec{b} \in \mathbb{R}$:

$$\vec{a}, \vec{b} \longmapsto \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

2. *Vektorprodukt.* Die Eingabe besteht aus zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ und die Ausgabe ist ein Vektor $\vec{a} \times \vec{b} \in \mathbb{R}^3$:

$$\vec{a}, \vec{b} \longmapsto \vec{a} \times \vec{b}.$$

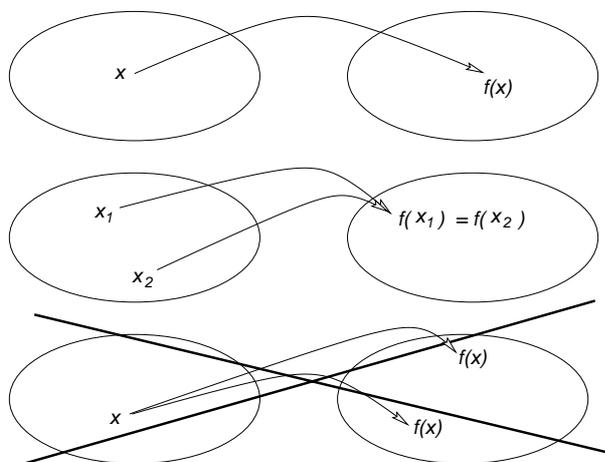


Abbildung 2.2: Eindeutige und nicht-eindeutige Zuordnungen.

3. *Geradengleichung*. Die Eingabe ist eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ und die Ausgabe ist ein Vektor aus \mathbb{R}^3 :

$$\lambda \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. *Sinusfunktion*. Die Eingabe ist eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ und die Ausgabe eine Zahl $y = \sin(x) \in \mathbb{R}$:

$$x \longmapsto \sin(x)$$

Die Sinusfunktion im Beispiel 4 ist eine *reelle Funktion* und damit besonders wichtig. Für eine reelle Funktion ist die Eingabe (die unabhängige Variable) eine Zahl aus \mathbb{R} , und die Ausgabe (die abhängige Variable) ist eine Zahl aus \mathbb{R} . Wir werden uns hauptsächlich mit reellen Funktionen beschäftigen.

In jedem der vier obigen Beispiele legen wir drei Informationen fest:

$$(\text{Definitionsbereich, Zuordnung, Wertebereich}). \quad (2.47)$$

Statt “Definitionsbereich” sagt man manchmal “Urbildmenge” und statt “Wertebereich” sagt man manchmal “Abbildmenge.” Die Tripel in Gln. 2.47 heißen *Abbildungen* oder *Funktionen*. Geben wir der Funktion den Namen f , schreiben wir

$$f = (\mathbb{D}, x \longmapsto f(x), \mathbb{W}); \quad (2.48)$$

hier ist \mathbb{D} der Definitionsbereich und \mathbb{W} der Wertebereich. Die Sinusfunktion ist definiert als

$$\sin = (\mathbb{R}, x \longmapsto \sin(x), \mathbb{R}). \quad (2.49)$$

Die Funktion im Beispiel 3 ist definiert als

$$\vec{x}_g = \left(\mathbb{R}, \lambda \longmapsto \vec{x}_g(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbb{R}^3 \right). \quad (2.50)$$

Das für die Variable benutzte Symbol ist belanglos. Also ist zum Beispiel

$$g = (\mathbb{D}, x \longmapsto g(x), \mathbb{W}) = (\mathbb{D}, t \longmapsto g(t), \mathbb{W}) = (\mathbb{D}, \rho \longmapsto g(\rho), \mathbb{W}).$$

Für die allgemeine Funktion in Gln. 2.48 ist es wichtig sich klarzumachen, daß f die Funktion ist, während $f(x)$ ein Element in \mathbb{W} ist; $f(x)$ ist nicht die gesamte Funktion.

Die Funktion f in Gln. 2.48 ist eine *reelle Funktion*, wenn \mathbb{D} und \mathbb{W} solche Teilmengen von \mathbb{R} sind, die *Intervalle* oder einfache Kombinationen von Intervallen darstellen. Für Intervalle benutzen wir die folgende Notation:

- Die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ mit $a \leq x \leq b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) bezeichnen wir als $[a, b]$. Dieses Intervall ist *geschlossen*.
- Die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ mit $a < x < b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) bezeichnen wir als $]a, b[$. Dieses Intervall ist *offen*.
- *Halboffene* Intervalle sind auch definiert. Das Intervall $]a, b]$ ist die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ mit $a < x \leq b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) und $[a, b[$ ist die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ mit $a \leq x < b$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

In dieser Notation ist $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$. Ein zulässiger Definitionsbereich einer reellen Funktion wäre auch die Kombination der beiden Intervalle $] -\infty, 0[$ und $]0, \infty[$. Für diese Menge benutzen wir auch die Notation $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dieser Definitionsbereich enthält alle reelle Zahlen außer der null.

Darstellung von Funktionen

Es gibt drei Möglichkeiten, eine Funktion darzustellen:

- analytisch (das heißt, durch die Angabe der Zuordnungsvorschrift in der Form einer Gleichung).
- tabellarisch (Angabe einer Wertetabelle).
- graphisch.

Um eine Funktion f graphisch darzustellen, geht man wie folgt vor:

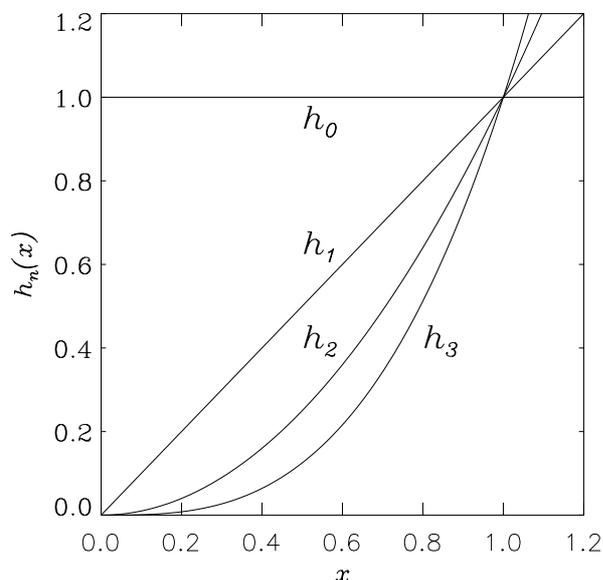


Abbildung 2.3: Die homogenen Polynome $h_0(x)$, $h_1(x)$, $h_2(x)$ und $h_3(x)$.

1. Wir wählen ein Kartesisches Koordinatensystem und legen auf der x -Achse den Definitionsbereich \mathbb{D} , und auf der y -Achse den Wertebereich \mathbb{W} .
2. Wir tragen in jedem Punkt $a \in \mathbb{D}$ die zugehörige y -Koordinate $f(a)$ auf. Die Punkte $(a, f(a)) \in \mathbb{R}^2$ bilden den Graphen von f .
3. Falls die Punkte eine geometrisch darstellbare Figur ergeben, spricht man von einem *zeichenbaren Graphen*.

Manche Funktionen sind nur als Wertetabelle oder Graphen darzustellen, zum Beispiel der Benzinpreis als Funktion der Zeit.

2.2 Elementare Funktionen der Grundausrüstung

Die homogenen Polynome

$$h_n = (\mathbb{R}, x \longmapsto h_n(x) = x^n, \mathbb{R})$$

für $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Abbildung 2.3 zeigt die vier Polynome $h_0(x)$, $h_1(x)$, $h_2(x)$ und $h_3(x)$. Wir sehen, daß alle Graphen durch den Punkt $(1,1)$ gehen, und alle Graphen für $n \geq 1$ durch

den Ursprung gehen. Je größer n , desto langsamer wächst $h_n(x)$ im Intervall $0 \leq x < 1$, und desto schneller wächst $h_n(x)$ im Intervall $1 \leq x < \infty$.

Die homogenen Polynome besitzen Symmetrieeigenschaften. Für gerade n ist

$$h_n(x) = h_n(-x), \quad (2.51)$$

das heißt, die Funktion ist spiegelsymmetrisch bezüglich der y -Achse. In diesem Fall sagen wir, daß $h_n(x)$ eine *gerade Funktion* ist.

Für ungerade n ist

$$h_n(x) = -h_n(-x), \quad (2.52)$$

das heißt, die Funktion ist punktsymmetrisch (Punktspiegelung) bezüglich des Ursprungs. Wir sagen, daß $h_n(x)$ eine *ungerade Funktion* ist.

Die trigonometrischen Funktionen sin und cos

Für eine reelle Zahl $\varphi \in [0, 2\pi[$ gibt Abbildung 2.4 die Definition von $\cos(\varphi)$ und $\sin(\varphi)$ wieder. In einem Kartesischen (x, y) -Koordinatensystem legt der Winkel φ einen Punkt P auf dem Einheitskreis fest. Der Einheitskreis hat sein Zentrum im Ursprung des Koordinatensystems und den Radius $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$. Der Funktionswert $\cos(\varphi)$ ist definiert als die x -Koordinate von P , und $\sin(\varphi)$ ist definiert als die y -Koordinate von P .

Für $\varphi < 0$ oder $\varphi \geq 2\pi$ gilt

$$\begin{aligned} \cos(\varphi + 2n\pi) &= \cos(\varphi), \\ \sin(\varphi + 2n\pi) &= \sin(\varphi) \end{aligned} \quad (2.53)$$

mit $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$. Abbildung 2.5 zeigt die Funktionen $\cos(\varphi)$ und $\sin(\varphi)$ für $\varphi \in [-2\pi, 4\pi]$. Die Cosinusfunktion erfüllt

$$\cos(\varphi) = \cos(-\varphi) \quad (2.54)$$

und ist damit eine gerade Funktion, während die Sinusfunktion mit

$$\sin(\varphi) = -\sin(-\varphi) \quad (2.55)$$

eine ungerade Funktion ist.

Gewöhnlicherweise schreibt man $\cos \varphi$ statt $\cos(\varphi)$, $\sin \varphi$ statt $\sin(\varphi)$, $\cos^2 \varphi$ statt $(\cos(\varphi))^2$ und $\sin^2 \varphi$ statt $(\sin(\varphi))^2$.

Es gibt unzählige Rechenregeln für sin und cos. Hier sind einige wichtige Beispiele:

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1,$$

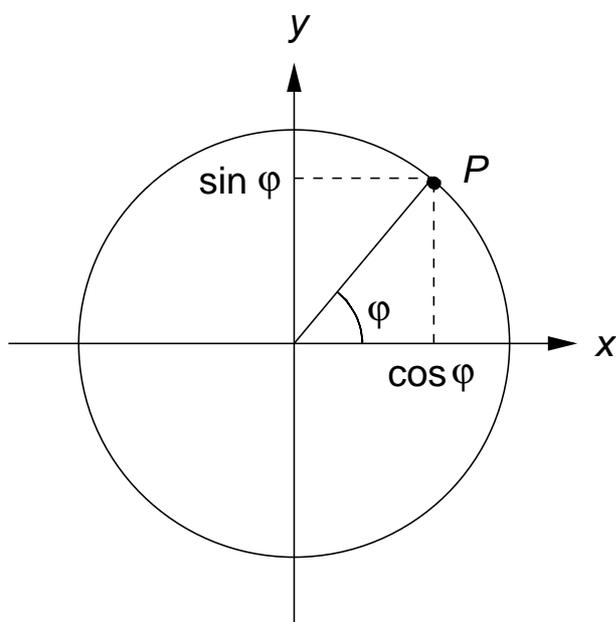


Abbildung 2.4: Die Definition von $\cos(\varphi)$ und $\sin(\varphi)$ für $\varphi \in [0, 2\pi[$.

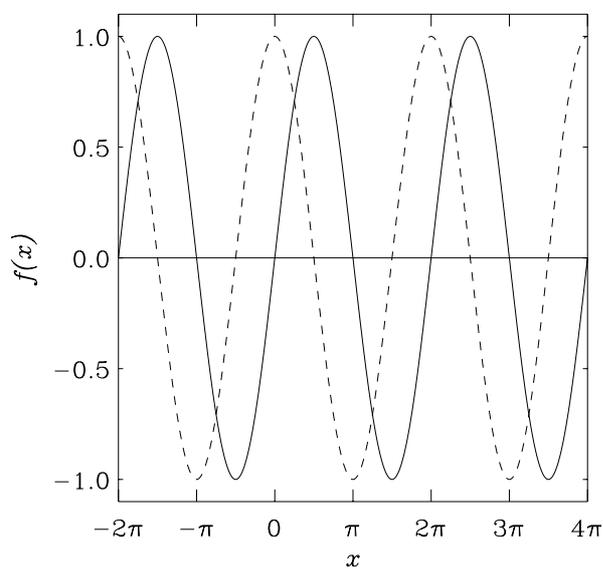
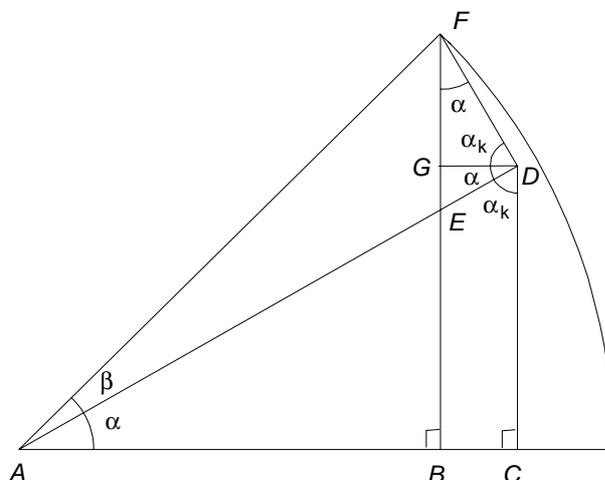


Abbildung 2.5: Die Graphen der Funktionen $\cos(\varphi)$ (gestrichelte Kurve) und $\sin(\varphi)$ (durchgezogene Kurve) für $\varphi \in [-2\pi, 4\pi]$.

Abbildung 2.6: Die geometrische Herleitung des Ausdruckes für $\sin(\alpha + \beta)$.

$$\begin{aligned}
 \cos(2\varphi) &= \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = 1 - 2 \sin^2 \varphi, \\
 \sin(2\varphi) &= 2 \sin \varphi \cos \varphi, \\
 \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta, \\
 \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta, \\
 \sin \varphi &= \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

Diese Rechenregel können zum Beispiel mittels geometrischer Argumente hergeleitet werden. Als Beispiel betrachten wir den Ausdruck für $\sin(\alpha + \beta)$. In Abbildung 2.6 ist der Abstand zwischen den Punkten A und F , $|AF| = 1$. Damit ist definitionsgemäss $|BF| = \sin(\alpha + \beta)$. Der Punkt D ist so definiert, daß $\angle(GFD) = \alpha$ ist. Ferner ist $\angle(DGF) = 90^\circ$. Da die Winkelsumme des Dreiecks DGF 180° ist, ist der Winkel $\angle(FDG) = \alpha_k = 90^\circ - \alpha$. Durch Vergleich der Dreiecke ACD und FGD finden wir, daß auch der Winkel $\angle(ADC) = \alpha_k$ ist. Der Winkel $\angle(CDG) = 90^\circ$ und $\angle(ADG) = 90^\circ - \alpha_k = \alpha$. Dann ist aber $\angle(ADF) = \angle(ADG) + \angle(FDG) = \alpha + \alpha_k = 90^\circ$. Im Dreieck ADF haben wir also $|AF| = 1$, $\angle(DAF) = \beta$ und $\angle(ADF) = 90^\circ$. Dann gilt $|AD| = \cos \beta$ und $|DF| = \sin \beta$. Wir berechnen nun

$$\sin(\alpha + \beta) = |BF| = |BG| + |GF| = |CD| + |GF|. \tag{2.57}$$

Im Dreieck ACD gilt $\angle(CAD) = \alpha$ und $\angle(ACD) = 90^\circ$; folglich ist der Abstand $|CD| = |AD| \sin \alpha = \cos \beta \sin \alpha$. Im Dreieck FGD gilt $\angle(GFD) = \alpha$ und $\angle(FGD) = 90^\circ$; folglich ist der Abstand $|GF| = |DF| \cos \alpha = \sin \beta \cos \alpha$. Einsetzen in Gln. 2.57 ergibt nun das gesuchte Ergebnis

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \tag{2.58}$$

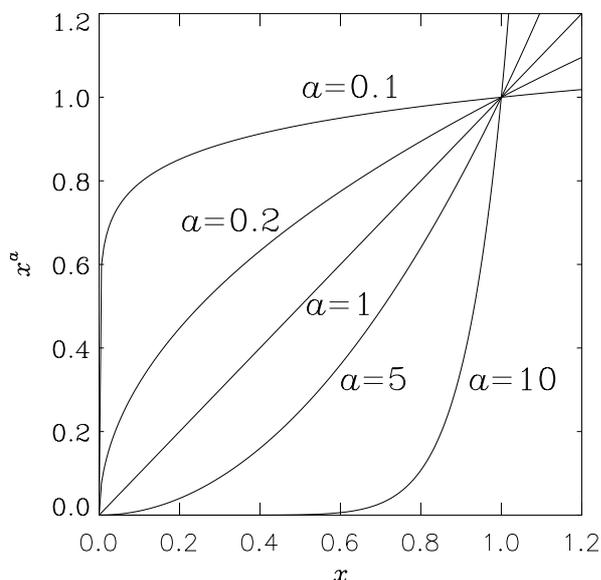


Abbildung 2.7: Graphen der Potenzfunktionen x^a mit $a = 0.1, 0.2, 1, 5$ und 10 .

Der Winkel, der als Eingabe einer trigonometrischen Funktion dient, kann entweder in *Radian* (rad, auch *Bogenmaß* genannt) oder in *Grad* angegeben werden. Gemessen in rad ist der Winkel φ in Abbildung 2.4 als die Länge des vom Winkel ausgeschnittenen Kreisbogens auf dem Einheitskreis definiert. “Eine ganze Umdrehung” entspricht damit einem Bogenmaß vom 2π . In Grad gemessen ist dieser Winkel 360° . Wir haben also $90^\circ = \pi/2$ rad, $180^\circ = \pi$ rad, $360^\circ = 2\pi$ rad und so weiter. Die Einheit “rad” kann weggelassen werden, so daß man $90^\circ = \pi/2$, $180^\circ = \pi$, $360^\circ = 2\pi$ schreibt.

Wir haben bereits in Gln. 2.49 eine formale Definition der Sinusfunktion gegeben. Wir wissen aber jetzt, daß der Wertebereich dieser Funktion $[-1, 1]$ ist. Daher können wir die Definition der Sinusfunktion präziser formulieren:

$$\sin = (\mathbb{R}, x \longmapsto \sin x, [-1, 1]). \quad (2.59)$$

Potenzfunktionen und Exponentialfunktionen

Eine *Potenzfunktion* hat die Form

$$f_P = (\mathbb{D}, x \longmapsto f_P(x) = x^a, \mathbb{W})$$

wobei normalerweise $a > 0$ ist. Wählen wir hier $\mathbb{D} = [0, \infty[$, so daß wir nur $x \geq 0$ betrachten, ist die Funktion immer bildbar und $\mathbb{W} = [0, \infty[$. Für $x < 0$ gibt es

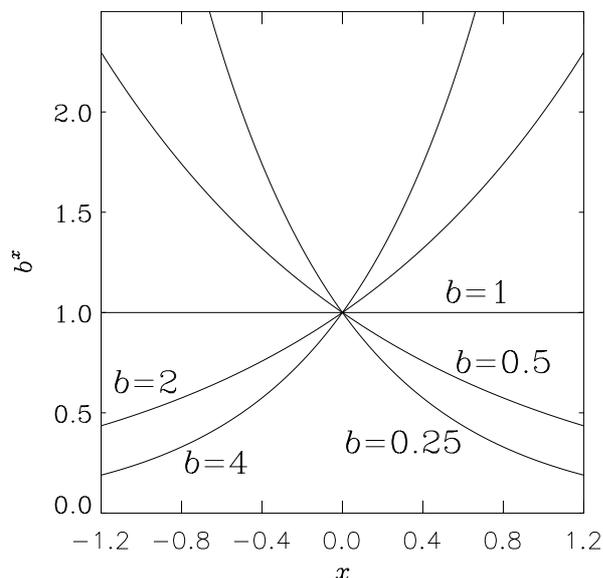


Abbildung 2.8: Die Graphen der Exponentialfunktionen b^x mit $b = 0.25, 0.5, 1, 2$ und 4 .

Probleme (was ist zum Beispiel $(-1)^{1/2}$?). Für gewisse Werte von a können wir einen Definitionsbereich größer als $[0, \infty[$ benutzen. Zum Beispiel können wir für $a = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ wählen. Wir haben $x^a = h_a(x)$ und $\mathbb{W} = [0, \infty[$. Einige Potenzfunktionen sind in Abbildung 2.7 dargestellt. Man sieht, daß alle Graphen durch $(0,0)$ und $(1,1)$ gehen. Die Steigung der Tangente im Ursprung ist 0 für $a \in]1, \infty[$, 1 für $a = 1$ und ∞ für $a \in]0, 1[$.

Betrachten wir einen bestimmten Wert x_0 , so liegt der Punkt (x_0, x_0^a) auf dem Graphen der Funktion $f_P(x) = x^a$. Man kann einfach nachprüfen, daß der Punkt (x_0^a, x_0) auf dem Graphen der Funktion $f_{P'}(x) = x^{1/a}$ liegt. Die beiden Punkte sind spiegelsymmetrisch bezüglich der Winkelhalbierende $y = x$ angeordnet. Folglich verhalten sich die Graphen der Funktionen $f_P(x) = x^a$ und $f_{P'}(x) = x^{1/a}$ spiegelbildlich bezüglich der Halbierenden. Dieses ist in Abbildung 2.7 deutlich erkennbar.

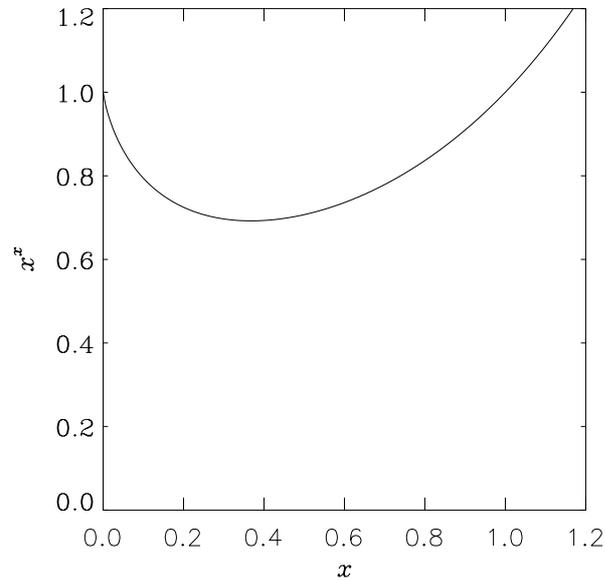
Eine *Exponentialfunktion* hat die Form

$$f_E = (\mathbb{D}, x \longmapsto f_E(x) = b^x, \mathbb{W})$$

wobei normalerweise $b > 0$ ist. Für Exponentialfunktionen können wir ohne Einschränkung $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ wählen. Da $b > 0$ ist, folgt $\mathbb{W} =]0, \infty[$.

Für $b = e = 2.7182818\dots$ erhalten wir *die* Exponentialfunktion

$$\exp = (\mathbb{R}, x \longmapsto \exp x = e^x,]0, \infty[).$$

Abbildung 2.9: Der Graph der Funktion x^x .

Zu dieser Funktion kehren wir später zurück. Abbildung 2.8 stellt einige Exponentialfunktionen dar. Die Graphen gehen alle durch den Punkt $(0,1)$. Wie man in der Abbildung erkennen kann, sind die Graphen der beiden Funktionen $f_E = b^x$ und $f_{E'} = (1/b)^x = b^{-x}$ spiegelsymmetrisch bezüglich der y -Achse.

Die besondere Funktion

$$f_{\text{PE}} = (]0, \infty[, x \longmapsto f_{\text{PE}}(x) = x^x,]0, \infty[),$$

die gewissermassen sowohl eine Potenzfunktion als auch eine Exponentialfunktion ist, ist in Abbildung 2.9 dargestellt. Wir werden später diese Funktion näher erörtern.

2.3 Konstruktion einer Funktion aus bereits bekannten Funktionen

Multiplikation mit einer Zahl

Ausgehend von der Funktion

$$f = (\mathbb{D}, x \longmapsto f(x), \mathbb{R}) \tag{2.60}$$

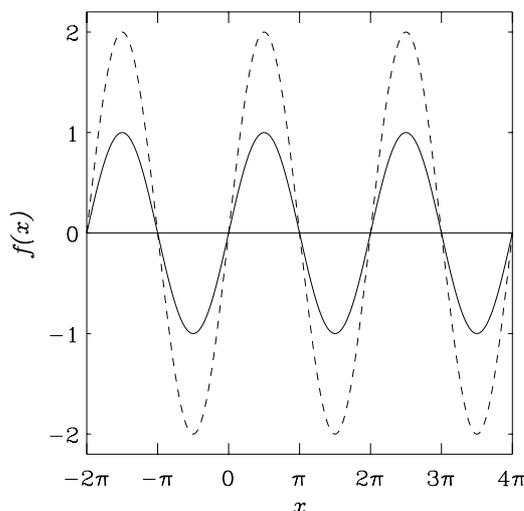


Abbildung 2.10: Die Graphen der Funktionen \sin (durchgezogene Kurve) und $2 \cdot \sin$ (gestrichelte Kurve).

definieren wir für $\alpha \in \mathbb{R}$

$$g = \alpha \cdot f = (\mathbb{D}, x \longmapsto (\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x), \mathbb{R}). \quad (2.61)$$

Für jeden x -Wert wird der Funktionswert $f(x)$ mit α multipliziert.

Die Abbildung 2.10 zeigt die Funktion \sin zusammen mit

$$g = 2 \cdot \sin = (\mathbb{R}, x \longmapsto g(x) = 2 \cdot \sin x, [-2, 2]). \quad (2.62)$$

Für $\alpha \neq 0$ haben die beiden Funktionen f und $g = \alpha \cdot f$ dieselben Nullstellen (das heißt, die x -Werte, für die $f(x) = 0$ wird, wird auch $g(x) = 0$). Die *Lage* der Extrema (Minima oder Maxima) bleibt unverändert. Ist $\alpha > 0$ hat g ein Maximum (Minimum) für die x -Werte, für die f ein Maximum (Minimum) besitzt. Für $\alpha < 0$ entspricht ein Maximum für f einem Minimum für g und umgekehrt. Für $\alpha = -1$ erhält man g als Spiegelung von f an der x -Achse. Zusammenfassend kann man sagen, daß die Multiplikation von f mit α einer Maßstabsänderung der y -Achse entspricht.

Addition von Funktionen

Ausgehend von den beiden Funktionen

$$\begin{aligned} f &= (\mathbb{D}, x \longmapsto f(x), \mathbb{R}) \\ g &= (\mathbb{D}, x \longmapsto g(x), \mathbb{R}) \end{aligned} \quad (2.63)$$

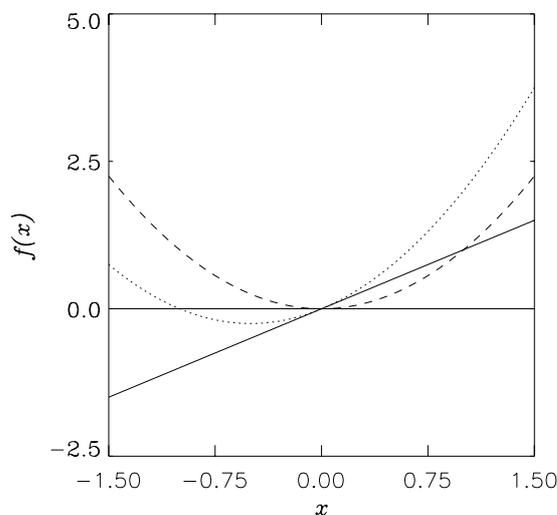


Abbildung 2.11: Die Graphen der Funktionen $h_1(x)$ (durchgezogene Kurve), $h_2(x)$ (gestrichelte Kurve) und $h_1(x) + h_2(x)$ (gepunktete Kurve).

definieren wir

$$f + g = (\mathbb{D}, x \longmapsto (f + g)(x) = f(x) + g(x), \mathbb{R}). \quad (2.64)$$

Für jeden Wert von $x \in \mathbb{D}$ werden die Funktionswerte $f(x)$ und $g(x)$ addiert.

Als Beispiel zeigen wir in Abbildung 2.11 die Funktionen $h_1(x)$, $h_2(x)$ und $h_1(x) + h_2(x)$. In der Nähe von $x = 0$ ist der Verlauf von $h_1 + h_2$ sehr ähnlich dem von h_1 , aber für $x \rightarrow \pm\infty$ wird $h_1 + h_2$ der Funktion h_2 zunehmend ähnlicher.

Polynome

Die Funktion

$$p = (\mathbb{R}, x \longmapsto p(x) = a_0 h_0(x) + a_1 h_1(x) + a_2 h_2(x) + \dots + a_n h_n(x), \mathbb{R}) \quad (2.65)$$

oder, anders ausgedrückt,

$$p = (\mathbb{R}, x \longmapsto p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n, \mathbb{R}), \quad (2.66)$$

ist ein *Polynom* n -ten Grades. Der Grad des Polynoms ist also der höchste Indexwert k , für den $a_k \neq 0$ gilt.

Der höchste Term $a_n x^n$ bestimmt das Verhalten von $p(x)$ für $x \rightarrow \pm\infty$; hingegen bestimmt der niedrigste Term (oft a_0) das Verhalten für $x \rightarrow 0$. Abbildung 2.12 zeigt den Graphen des Polynoms $p(x) = 2 + 2x - x^2$.

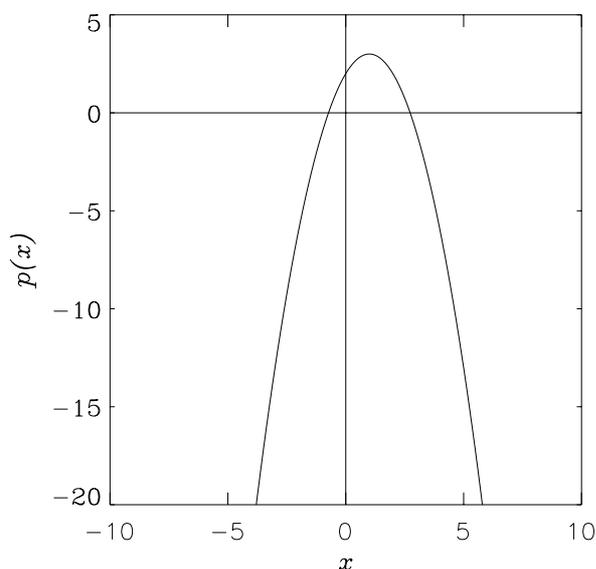


Abbildung 2.12: Das Polynom $p(x) = 2 + 2x - x^2$.

Ein *gerades Polynom* erfüllt $p(x) = p(-x)$ und enthält nur Terme $a_k x^k$ mit k gerade. Ein *ungerades Polynom* erfüllt $p(x) = -p(-x)$ und enthält nur Terme $a_k x^k$ mit k ungerade.

Ein Polynom n -ten Grades hat maximal n reelle Nullstellen, ein ungerades Polynom hat mindestens eine Nullstelle ($x = 0$). Warum?

Multiplikation von Funktionen

Ausgehend von den beiden Funktionen

$$\begin{aligned} f &= (\mathbb{D}, x \longmapsto f(x), \mathbb{R}) \\ g &= (\mathbb{D}, x \longmapsto g(x), \mathbb{R}) \end{aligned} \quad (2.67)$$

definieren wir

$$f \cdot g = (\mathbb{D}, x \longmapsto (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \mathbb{R}). \quad (2.68)$$

Für jedes $x \in \mathbb{D}$ wird $f(x) \cdot g(x)$ gebildet.

Die Nullstellen der Funktion $f \cdot g$ sind die Nullstellen von f zusammen mit den Nullstellen von g . Das Vorzeichen von $f \cdot g$ ergibt sich aus den Vorzeichen von f und g . Als Beispiel betrachten wir in Abbildung 2.13 die Funktion $h_1(h_2 - h_0)$, das heißt, eine Produktfunktion $f \cdot g$ mit $f(x) = h_1(x) = x$ und $g(x) = h_2(x) - h_0(x) = x^2 - 1$.

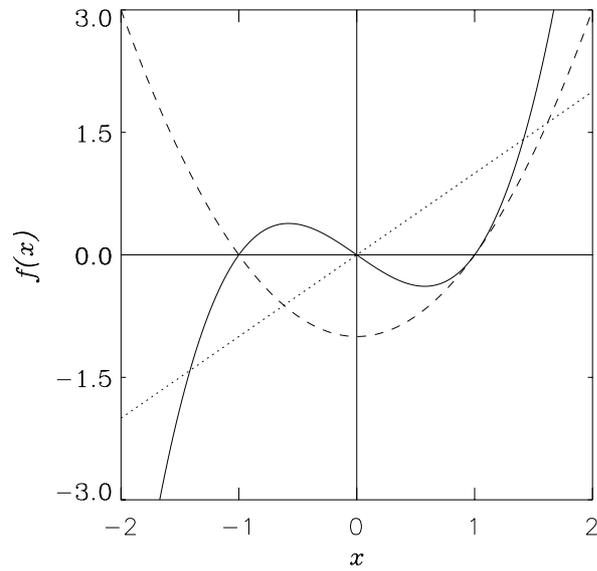


Abbildung 2.13: Die Graphen der Produktfunktion $f \cdot g = h_1(h_2 - h_0)$ (durchgezogene Kurve) zusammen mit $f = h_1$ (gepunktete Kurve) und $g = h_2 - h_0$ (gestrichelte Kurve).

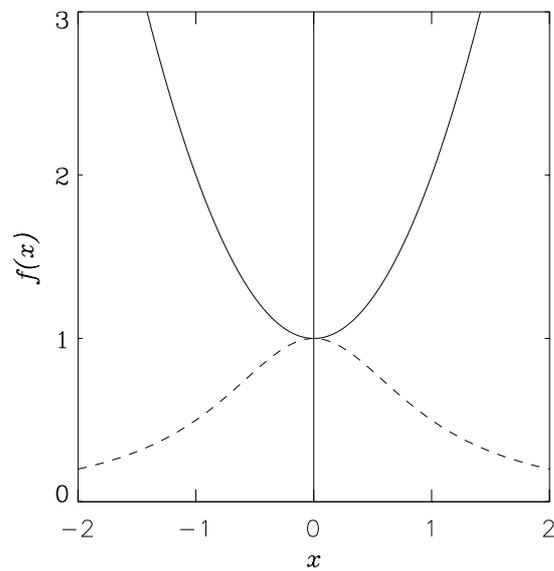


Abbildung 2.14: Die Graphen der Funktionen p (durchgezogene Kurve) und $1/p$ (gestrichelte Kurve).

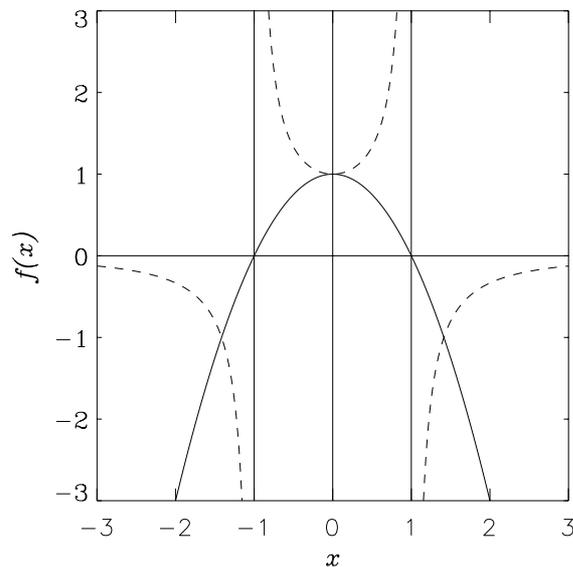


Abbildung 2.15: Die Funktionen q (durchgezogene Kurve) und $1/q$ (gestrichelte Kurve).

Sind f und g beide gerade Funktionen, oder sind sie beide ungerade Funktionen, dann ist $f \cdot g$ eine gerade Funktion. Ist eine der beiden Funktionen f und g gerade, und die andere Funktion ungerade, dann ist $f \cdot g$ eine ungerade Funktion.

Quotient zweier Funktionen

Ausgehend von den beiden Funktionen

$$\begin{aligned} f &= (\mathbb{D}, x \longmapsto f(x), \mathbb{R}) \\ g &= (\mathbb{D}, x \longmapsto g(x), \mathbb{R} \setminus \{0\}) \end{aligned} \quad (2.69)$$

definieren wir

$$\frac{f}{g} = \left(\mathbb{D}, x \longmapsto \left(\frac{f}{g} \right) (x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \mathbb{R} \right). \quad (2.70)$$

Für jedes $x \in \mathbb{D}$ wird $f(x)/g(x)$ gebildet. Der Definitionsbereich \mathbb{D} von f/g muß so gewählt werden, daß $g(x)$ nicht den Wert 0 annimmt.

Als erstes Beispiel betrachten wir die Funktion $p(x) = 1 + x^2$ und die sogenannte *reziproke Funktion*

$$\frac{1}{p} = \left(\mathbb{R}, x \longmapsto \left(\frac{1}{p} \right) (x) = \frac{1}{1 + x^2}, \mathbb{R} \right). \quad (2.71)$$

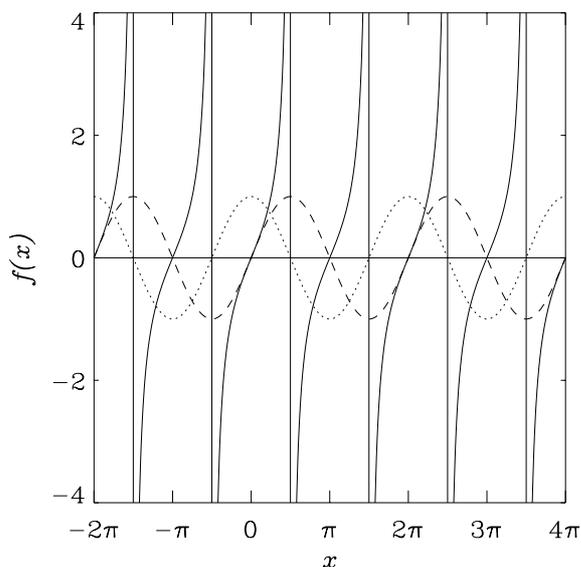


Abbildung 2.16: Die Funktionen $\tan = \sin / \cos$ (durchgezogene Kurve), \sin (gestrichelte Kurve) und \cos (gepunktete Kurve).

Die Funktion $p(x)$ hat keine Nullstellen. Deshalb können wir $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ wählen. Die Graphen der Funktionen p und $1/p$ sind in Abbildung 2.14 dargestellt.

Die Funktion $q(x) = 1 - x^2$ besitzt zwei Nullstellen: $q(x) = 0$ für $x = \pm 1$. Damit müssen wir ihre reziproke Funktion $1/q$ wie folgt definieren:

$$\frac{1}{q} = \left(\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, x \longmapsto \left(\frac{1}{q} \right) (x) = \frac{1}{1 - x^2}, \mathbb{R} \right). \quad (2.72)$$

Die Graphen der Funktionen q und $1/q$ sind in Abbildung 2.15 dargestellt.

Schließlich betrachten wir die Funktion

$$\frac{\sin}{\cos} = \left(\mathbb{D}_0, x \longmapsto \left(\frac{\sin}{\cos} \right) (x) = \frac{\sin x}{\cos x}, \mathbb{R} \right), \quad (2.73)$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_0 &= \mathbb{R} \setminus \{\text{Nullstellen von } \cos\} \\ &= \mathbb{R} \setminus \left\{ (2n + 1) \frac{\pi}{2}; n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \right\}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Die Funktion \sin / \cos wird normalerweise \tan (oder tg) genannt. Ihr Graph ist in Abbildung 2.16 zusammen mit den Graphen von \sin und \cos dargestellt.

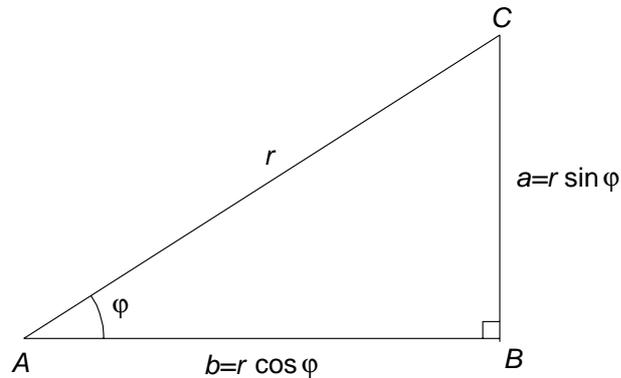
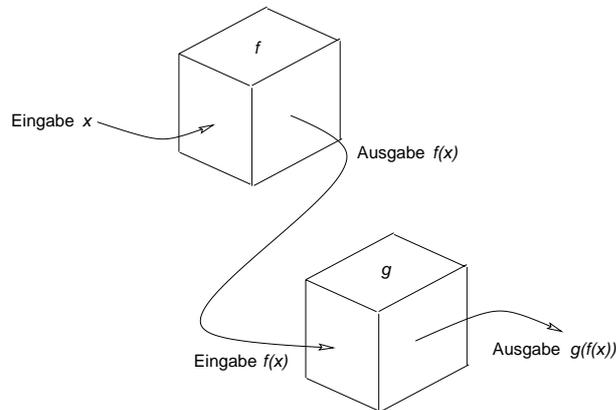
Abbildung 2.17: Dreieck ABC .

Abbildung 2.18: Die Zusammensetzung zweier Funktionen.

Im Dreieck ABC der Abbildung 2.17 ist $\angle(ABC) = 90^\circ$. Damit ist

$$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{a}{b}, \quad (2.75)$$

das heißt $\tan \varphi$ ist gleich dem Verhältnis der Gegenkathete zur Ankathete.

Zusammensetzung von Funktionen

Abbildung 2.18 zeigt das Prinzip der Zusammensetzung zweier Funktionen. Zwei “Zuordnungs-Automaten” (Abbildung 2.1) sind in Serie gekoppelt, und die Ausgabe $f(x)$ von Automat f wird als Eingabe von Automat g benutzt.

Formal definieren wir, ausgehend von den beiden Funktionen

$$f = (\mathbb{D}_f, x \longmapsto f(x), \mathbb{W}_g)$$

$$g = (\mathbb{W}_g, x \longmapsto g(x), \mathbb{R}) \quad (2.76)$$

die Funktion $g \circ f$ (g nach f) wie folgt

$$g \circ f = (\mathbb{D}_f, x \longmapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)), \mathbb{R}). \quad (2.77)$$

Als Beispiel betrachten wir die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} f &= \left(\mathbb{R}, y \longmapsto f(y) = \frac{1}{1+y^2},]0, 1] \right) \\ g &= E_a = (\mathbb{R}, x \longmapsto g(x) = a^x,]0, \infty[), \end{aligned} \quad (2.78)$$

mit $a > 0$. In diesem Fall können wir ohne Einschränkung sowohl $g \circ f$ als auch $f \circ g$ bilden:

$$\begin{aligned} f \circ g &= f \circ E_a = \left(\mathbb{R}, x \longmapsto (f \circ g)(x) = \frac{1}{1+(a^x)^2},]0, 1] \right) \\ g \circ f &= E_a \circ f = \left(\mathbb{R}, x \longmapsto (g \circ f)(x) = a^{\frac{1}{1+x^2}},]0, \infty[\right). \end{aligned} \quad (2.79)$$

Den Ausdruck für $(f \circ g)(x)$ können wir als

$$\frac{1}{1+(a^x)^2} = \frac{1}{1+a^{2x}} \quad (2.80)$$

vereinfachen.

Es ist manchmal notwendig, den Definitionsbereich einer Funktion zu verkleinern, um eine Zusammensetzung dieser Funktion mit einer anderen Funktion zu ermöglichen. Nehmen wir als Beispiel

$$g = \left(\mathbb{R} \setminus \{0\}, x \longmapsto g(x) = \frac{1}{x}, \mathbb{R} \setminus \{0\} \right). \quad (2.81)$$

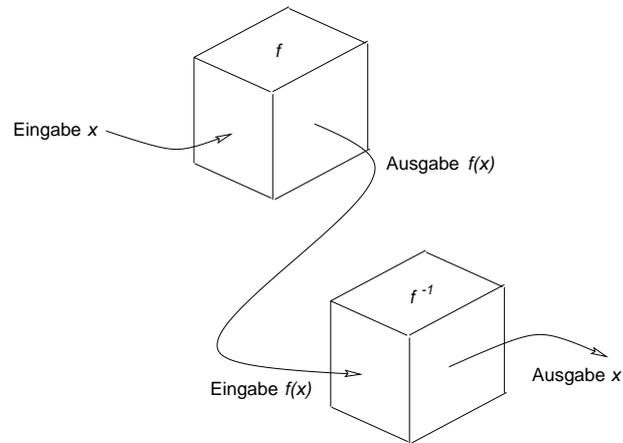
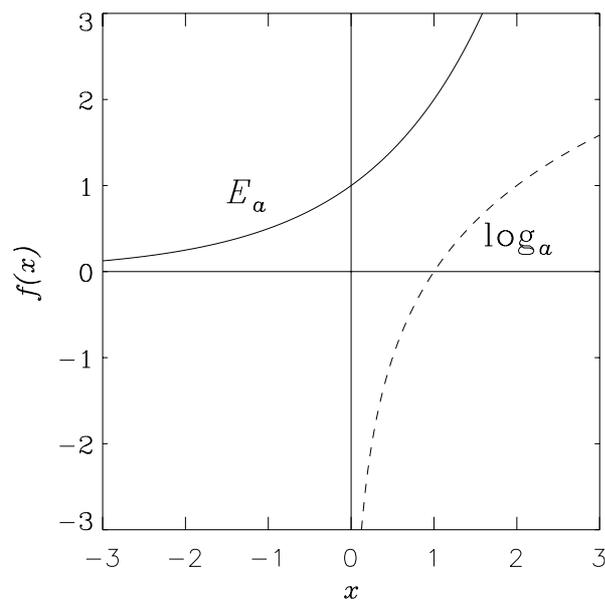
Für $h_2(x) = x^2$ können wir nicht unmittelbar $f \circ h_2$ bilden, da $h_2(0) = 0$ ist und $g(h_2(0))$ folglich nicht definiert ist. Definieren wir aber

$$\tilde{h}_2 = \left(\mathbb{R} \setminus \{0\}, x \longmapsto \tilde{h}_2(x) = x^2,]0, \infty[\right), \quad (2.82)$$

ist

$$g \circ \tilde{h}_2 = \left(\mathbb{R} \setminus \{0\}, x \longmapsto (g \circ \tilde{h}_2)(x) = \frac{1}{x^2},]0, \infty[\right), \quad (2.83)$$

definiert.

Abbildung 2.19: Die inverse Abbildung f^{-1} .Abbildung 2.20: Die Graphen der Funktionen E_a und \log_a für $a = 2$.

Die inverse Funktion

Abbildung 2.19 zeigt das Prinzip der inversen Funktion. Für eine gegebene Funktion f suchen wir die inverse Funktion f^{-1} . Diese Funktion ist so beschaffen, daß $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ ist.

Bei der Definition von f^{-1} können Probleme entstehen, weil der Wertebereich

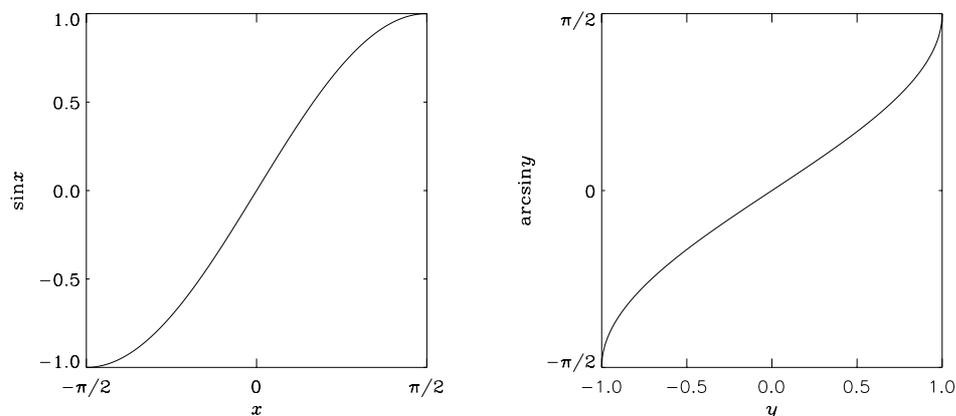


Abbildung 2.21: Die Graphen der Funktionen sin und arcsin.

von f , \mathbb{W}_f , unter Umständen nicht mit dem Definitionsbereich von f^{-1} , $\mathbb{D}_{f^{-1}}$, übereinstimmt. Betrachten wir als Beispiel die Funktion

$$h_2 = (\mathbb{R}, x \longmapsto h_2(x) = x^2, [0, \infty[). \quad (2.84)$$

Um die inverse Funktion zu definieren, suchen wir die Lösungen x der Gleichung

$$h_2(x) = x^2 = y \quad (2.85)$$

für einen gegebenen y -Wert. Offensichtlich gibt es keine Lösungen für $y < 0$. Daher kann der Definitionsbereich von h_2^{-1} , $\mathbb{D}_{h_2^{-1}}$ höchstens das Intervall $[0, \infty[$ sein. Für $y > 0$ hat Gln. 2.85 jedoch zwei Lösungen, $x = \sqrt{y}$ und $x = -\sqrt{y}$. Die Funktion h_2^{-1} ist in diesem Bereich nicht eindeutig definiert und existiert folglich nicht. Durch Verkleinerung des Definitionsbereichs von h_2 können wir eine neue Funktion definieren:

$$\tilde{h}_2 = ([0, \infty[, x \longmapsto \tilde{h}_2(x) = x^2, [0, \infty[). \quad (2.86)$$

Diese Funktion hat eine inverse Funktion

$$\tilde{h}_2^{-1} = ([0, \infty[, x \longmapsto \tilde{h}_2^{-1}(x) = \sqrt{x}, [0, \infty[) \quad (2.87)$$

da

$$\tilde{h}_2^{-1} \circ \tilde{h}_2 = ([0, \infty[, x \longmapsto (\tilde{h}_2^{-1} \circ \tilde{h}_2)(x) = x, [0, \infty[). \quad (2.88)$$

Formal ist für eine allgemeine Funktion

$$f = (\mathbb{D}, x \longmapsto f(x), \mathbb{W}) \quad (2.89)$$

die inverse Funktion

$$f^{-1} = (\mathbb{W}, x \longmapsto f^{-1}(x), \mathbb{D}) \quad (2.90)$$

so definiert, daß

$$f^{-1} \circ f = (\mathbb{D}, x \longmapsto (f^{-1} \circ f)(x) = x, \mathbb{D}) \quad (2.91)$$

erfüllt ist.

Betrachten wir als Beispiel mit $a > 0$ die folgende Exponentialfunktion

$$E_a = (\mathbb{R}, x \longmapsto g(x) = a^x,]0, \infty[). \quad (2.92)$$

Die inverse Funktion ist

$$E_a^{-1} = \log_a = (]0, \infty[, x \longmapsto E_a^{-1}(x) = \log_a x, \mathbb{R}), \quad (2.93)$$

da $\log_a(a^x) = x$ ist. Für \log_{10} schreibt man meistens \lg , und für \log_e schreibt man \ln . Die Graphen der beiden Funktionen E_2 ($a = 2$) und \log_2 sind in der Abbildung 2.20 dargestellt. Die Graphen zweier Funktionen, die invers zueinander sind, sind immer spiegelsymmetrisch bezüglich der Winkelhalbierungslinie $y = x$ angeordnet.

Die Gleichung

$$\sin x = y \quad (2.94)$$

hat keine Lösung x für $|y| > 1$; für $|y| \leq 1$ hat sie unendlich viele Lösungen. Die Funktion \sin , definiert in Gln. 2.59, hat folglich keine inverse Funktion. Definieren wir jedoch eine "eingeschränkte" Sinusfunktion

$$\sin = \left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], x \longmapsto \sin x, [-1, 1] \right), \quad (2.95)$$

so existiert zu dieser Funktion die inverse Funktion

$$\sin^{-1} = \arcsin = \left([-1, 1], x \longmapsto \arcsin x, \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right). \quad (2.96)$$

Abbildung 2.21 zeigt die Funktionen \sin und \arcsin .

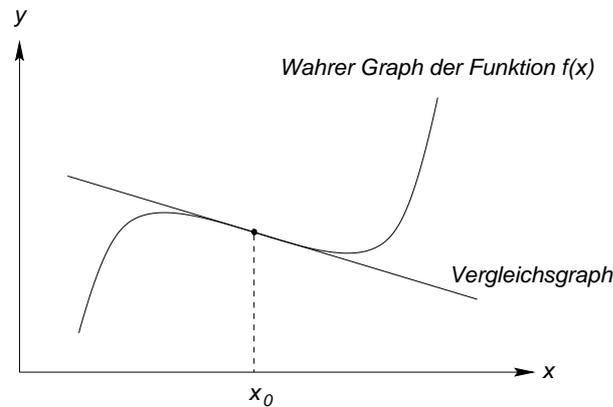


Abbildung 3.1: Ein Vergleichsgraph.

3 Differentialrechnung bei reellen Funktionen mit einer Veränderlichen

3.1 Tangentenzzerlegung

Wir betrachten eine Funktion

$$f = (\mathbb{D}, x \longmapsto f(x), \mathbb{W}). \quad (3.1)$$

Setzen wir voraus, daß wir für einen bestimmten Wert $x_0 \in \mathbb{D}$ den Funktionswert $f(x_0)$ kennen. Die Frage ist nun: Können wir Schlüsse auf benachbarte Punkte ziehen? Das heißt, können wir Funktionswerte $f(x_0 + \Delta x)$ berechnen, wenn $|\Delta x|$ "hinreichend klein" ist?

Wir suchen zur Funktion f in Gln. (3.1) eine "einfache Vergleichsfunktion"

- a) deren Graphen durch $(x_0, f(x_0))$ geht
- d) und die in der Nähe dieses Punktes $x \longmapsto f(x)$ in einem allgemein anwendbaren Sinne approximiert.

Abbildung 3.1 zeigt schematisch den Graphen einer Funktion f und den Graphen einer solchen Vergleichsfunktion.

Die einfachsten Vergleichsfunktionen sind Geraden durch $(x_0, f(x_0))$ mit verschiedenen Steigungen; zwischen solchen Geraden liefert die Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$ die beste Approximation der Funktion f in der Nähe dieses Punktes von allen möglichen Geraden.

Beispiel:

$$f = h_2 = (\mathbb{R}, x \longmapsto h_2(x) = x^2, [0, \infty[). \quad (3.2)$$

Hier ist $(x_0, f(x_0)) = (x_0, x_0^2)$. Als Vergleichsfunktion nehmen wir eine Gerade mit der Steigung m :

$$x \longmapsto g_m(x) = h_2(x_0) + m(x - x_0). \quad (3.3)$$

Setzen wir $x = x_0 + \Delta x$ gilt

$$x \longmapsto g_m(x_0 + \Delta x) = h_2(x_0) + m \Delta x. \quad (3.4)$$

Wie sollen wir den Wert von m wählen, um die optimale Vergleichsfunktion zu erhalten? Betrachten wir den *Approximationsfehler*

$$F_m(x_0, \Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - g_m(x_0 + \Delta x). \quad (3.5)$$

In unserem Beispiel ist diese Funktion

$$\begin{aligned} F_m(x_0, \Delta x) &= h_2(x_0 + \Delta x) - g_m(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2 - (x_0^2 + m \Delta x) \\ &= (2x_0 - m) \Delta x + \Delta x^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Dieser Ausdruck besagt, daß je kleiner $|\Delta x|$ wird, desto kleiner wird der Fehler $F_m(x_0, \Delta x)$ bei allen m . Wie sollen wir also dann den besten Wert von m wählen?

Wir erhalten ein klareres Bild, wenn wir anstatt des "absoluten" Fehlers $F_m(x_0, \Delta x)$, den sogenannten *lokalen Fehler*

$$R_m(x_0, \Delta x) = \frac{F_m(x_0, \Delta x)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - g_m(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} \quad (3.7)$$

berechnen. Je weiter wir uns von x_0 entfernen (das heißt, je größer $|\Delta x|$ wird), desto größer ist der Absolutfehler, denn wir noch akzeptieren können. Zum Beispiel ist ein Fehler $F_m(x_0, 10^{-1}) = 1$ "weniger schlimm" als der Fehler $F_m(x_0, 10^{-2}) = 1$, obwohl beide Fehler gleich groß sind. Der lokale Fehler $R_m(x_0, \Delta x)$ spiegelt dieses wieder. Für $F_m(x_0, 10^{-1}) = F_m(x_0, 10^{-2}) = 1$ haben wir

$$R_m(x_0, 10^{-1}) = \frac{1}{10^{-1}} = 10, \quad (3.8)$$

$$R_m(x_0, 10^{-2}) = \frac{1}{10^{-2}} = 100. \quad (3.9)$$

In unserem Beispiel ist (siehe Gln. (3.6))

$$R_m(x_0, \Delta x) = (2x_0 - m) + \Delta x. \quad (3.10)$$

Wählen wir also

$$m = 2x_0 \quad (3.11)$$

haben wir

$$R_{2x_0}(x_0, \Delta x) = \Delta x \quad (3.12)$$

und wir erreichen, daß $R_m(x_0, \Delta x)$ gegen 0 geht, wenn Δx gegen 0 geht. In der unmittelbaren Umgebung von x_0 liefert damit g_{2x_0} die optimale Approximation von $f(x)$.

Verallgemeinerung:

1. Man habe eine Funktion

$$f = (\mathbb{D}, x \longmapsto f(x), \mathbb{W}); \quad (3.13)$$

der Funktionswert $f(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{D}$, ist bekannt.

2. Betrachte nun alle Geraden

$$g_m(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + m \Delta x \quad (3.14)$$

durch $(x_0, f(x_0))$. Die Differenz

$$F_m(x_0, \Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - g_m(x_0 + \Delta x) \quad (3.15)$$

ist der Approximationsfehler.

3. Bestimme m so, daß der lokale Fehler

$$R_m(x_0, \Delta x) = \frac{F_m(x_0, \Delta x)}{\Delta x} \quad (3.16)$$

für $\Delta x \rightarrow 0$ verschwindet. (Das heißt, der Graph der Funktion $R_m(x_0, \Delta x)$ mündet bei Annäherung an 0 von beiden Seiten in den Punkt (0,0).) Die Funktion $F_m(x_0, \Delta x)$ kann also als

$$F_m(x_0, \Delta x) = R_m(x_0, \Delta x) \cdot \Delta x \quad (3.17)$$

geschrieben werden, wobei $R_m(x_0, \Delta x) \rightarrow 0$ für $\Delta x \rightarrow 0$ gilt.

Ist \mathbb{I} eine Teilmenge von \mathbb{D} mit $x_0 \in \mathbb{I}$, so sagt man, daß die Funktion

$$f = (\mathbb{I}, x \longmapsto f(x), \mathbb{R}) \quad (3.18)$$

eine *Tangentenzerlegung* im Punkt $(x_0, f(x_0))$ besitzt, falls man für alle $x \in \mathbb{I}$ die Werte $f(x) = f(x_0 + \Delta x)$ wie folgt berechnen kann:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + m \cdot \Delta x + R_m(x_0, \Delta x) \cdot \Delta x \quad (3.19)$$

mit $R_m(x_0, \Delta x) \rightarrow 0$ für $\Delta x \rightarrow 0$. In der Gleichung (3.19) ist $f(x_0 + \Delta x)$ der gesuchte Wert von f in einem Punkt in der Nähe von x_0 , $f(x_0)$, ist bekannt, m ist die Steigung der "Tangente" des Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$, und $R_m(x_0, \Delta x) \cdot \Delta x$ ist der Restterm mit $R_m(x_0, \Delta x) \rightarrow 0$ für $\Delta x \rightarrow 0$.

Eine Funktion f hat höchstens eine Tangentenzerlegung in einem gegebenen Punkt $(x_0, f(x_0))$. Nehmen wir an, es existieren zwei Zerlegungen, die alle Bedingungen erfüllen, so haben wir nach Gln. (3.19):

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + m_1 \cdot \Delta x + R_1(x_0, \Delta x) \cdot \Delta x, \quad (3.20)$$

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + m_2 \cdot \Delta x + R_2(x_0, \Delta x) \cdot \Delta x, \quad (3.21)$$

wobei sowohl $R_1(x_0, \Delta x) \rightarrow 0$ als auch $R_2(x_0, \Delta x) \rightarrow 0$ geht für $\Delta x \rightarrow 0$. Bilden wir nun die Differenz zwischen Gln. (3.20) und (3.21), so erhalten wir

$$0 = (m_1 - m_2) \cdot \Delta x + (R_1(x_0, \Delta x) - R_2(x_0, \Delta x)) \cdot \Delta x. \quad (3.22)$$

Division durch $\Delta x (\neq 0)$ und Umstellung der Gleichung ergeben

$$m_2 - m_1 = R_1(x_0, \Delta x) - R_2(x_0, \Delta x). \quad (3.23)$$

Für $\Delta x \rightarrow 0$ gehen R_1 und R_2 unabhängig voneinander gegen 0, also muß $m_2 - m_1$ auch gegen 0 gehen. Dieses ist nur für $m_1 = m_2$ möglich. Daher kann es höchstens eine Tangentenzerlegung geben.

Die Funktion

$$g_m(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + m \cdot \Delta x \quad (3.24)$$

nennt man *Tangentenapproximation*. Die Größe m (der Wert der Steigung der Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$) wird auch als $f'(x_0)$, als Wert der ersten Ableitung an der Stelle x_0 , bezeichnet. Wir schreiben also

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x + R(x_0, \Delta x) \cdot \Delta x \quad (3.25)$$

mit $R(x_0, \Delta x) \rightarrow 0$ für $\Delta x \rightarrow 0$. Weitere Schreibweisen für $f'(x_0)$ sind $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}$ und $\frac{df(x_0)}{dx}$.

Grenzwerte: Anstatt $\phi(x) \rightarrow A$ für $x \rightarrow b$ kann man schreiben

$$\lim_{x \rightarrow b} \phi(x) = A. \quad (3.26)$$

Damit haben wir mit Gln. (3.25) den Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} R(x_0, \Delta x) = 0. \quad (3.27)$$

Gleichung (3.25) ergibt

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + R(x_0, \Delta x). \quad (3.28)$$

Falls die Funktion f eine Tangenzenzerlegung im Punkt $(x_0, f(x_0))$ besitzt, können wir damit schreiben

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (3.29)$$

3.2 Tangenzenzerlegung an einigen Beispielen

Die Fragestellung ist hier immer: Gelingt es, $f(x_0 + \Delta x)$ nach Gln. (3.25) zu schreiben?

Beispiel:

Für $f = h_2$ gilt

$$h_2(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2 = x_0^2 + 2 \cdot x_0 \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \Delta x. \quad (3.30)$$

Mit

$$h_2(x_0) = x_0^2, \quad (3.31)$$

$$h_2'(x_0) = 2 \cdot x_0, \quad (3.32)$$

$$R(x_0, \Delta x) = \Delta x \quad (3.33)$$

hat Gln. (3.30) die Form von Gln. (3.25). Ferner gilt

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} R(x_0, \Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0. \quad (3.34)$$

Die Funktion h_2 besitzt also eine Tangenzenzerlegung an einer willkürlichen Stelle x_0 , und die erste Ableitung von h_2 ist

$$h_2'(x_0) = 2 \cdot x_0. \quad (3.35)$$

In den Übungen wird gezeigt, daß das homogene Polynom h_n mit

$$h_n(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^n \quad (3.36)$$

eine Tangenzenzerlegung an der willkürlichen Stelle x_0 besitzt. Die erste Ableitung von h_n ist

$$h_n'(x_0) = n \cdot x_0^{n-1}. \quad (3.37)$$

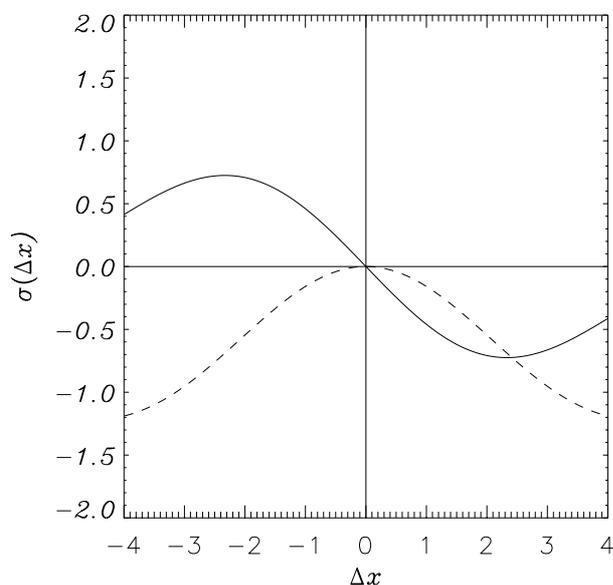


Abbildung 3.2: Die Graphen der Funktionen $\sigma_1(\Delta x) = (\cos(\Delta x) - 1)/\Delta x$ (durchgezogene Kurve) und $\sigma_2(\Delta x) = (\sin(\Delta x) - \Delta x)/\Delta x$ (gestrichelte Kurve).

Beispiel:

Betrachten wir $f = \sin$. Hier gilt

$$\begin{aligned}
 \sin(x_0 + \Delta x) &= \sin(x_0) \cos(\Delta x) + \cos(x_0) \sin(\Delta x) \\
 &= \sin(x_0) + \{\sin(x_0) [\cos(\Delta x) - 1] + \cos(x_0) \sin(\Delta x)\} \\
 &= \sin(x_0) + \cos(x_0) \cdot \Delta x \\
 &+ \Delta x \cdot \left\{ \sin(x_0) \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} + \cos(x_0) \frac{\sin(\Delta x) - \Delta x}{\Delta x} \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Mit

$$R(x_0, \Delta x) = \sin(x_0) \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} + \cos(x_0) \frac{\sin(\Delta x) - \Delta x}{\Delta x} \tag{3.39}$$

hat Gln. (3.38) die Form von Gln. (3.25). Abbildung 3.2 zeigt, daß

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} = 0 \tag{3.40}$$

und

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x) - \Delta x}{\Delta x} = 0 \tag{3.41}$$

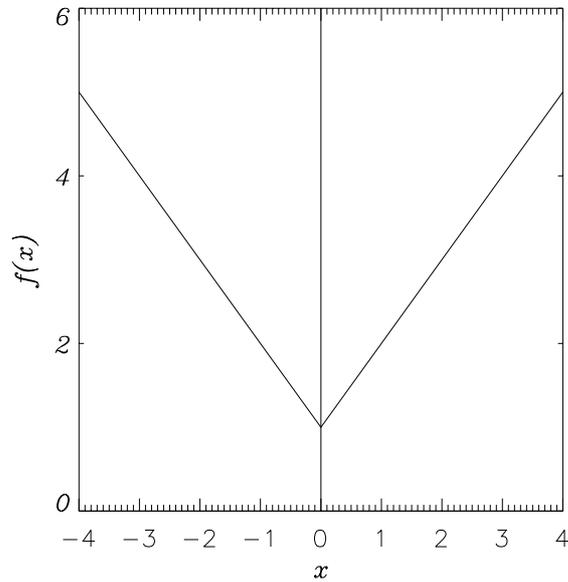


Abbildung 3.3: Der Graph der Funktion $f(x) = |x| + 1$.

sind. Damit gilt

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} R(x_0, \Delta x) = 0. \quad (3.42)$$

Die Funktion \sin besitzt also eine Tangenzenzerlegung an einer willkürlichen Stelle x_0 , und die erste Ableitung von \sin ist

$$\sin'(x_0) = \cos(x_0). \quad (3.43)$$

In analoger Weise zeigt man, daß

$$\cos'(x_0) = -\sin(x_0) \quad (3.44)$$

ist.

Beispiel:

Setzen wir nun (siehe Abbildung 3.3)

$$f(x) = |x| + 1 \quad (3.45)$$

Dann ist

$$f(x_0 + \Delta x) = |x_0 + \Delta x| + 1. \quad (3.46)$$

Besitzt die Funktion f an der Stelle $x_0 = 0$ eine Tangenzenzerlegung? Ist dieses der Fall, gilt

$$\begin{aligned} f(0 + \Delta x) &= |\Delta x| + 1 \\ &= f(0) + m \cdot \Delta x + \Delta x \cdot R(0, \Delta x) \\ &= 1 + m \cdot \Delta x + \Delta x \cdot R(0, \Delta x) \end{aligned} \quad (3.47)$$

wobei

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} R(0, \Delta x) = 0 \quad (3.48)$$

zu prüfen ist. Gleichung (3.47) ergibt

$$R(0, \Delta x) = \frac{|\Delta x| - m \cdot \Delta x}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} - m = \begin{cases} -1 - m & \text{wenn } \Delta x < 0 \\ +1 - m & \text{wenn } \Delta x > 0 \end{cases} \quad (3.49)$$

Es gibt demzufolge keinen Wert von m , der $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} R(0, \Delta x) = 0$ bewirkt. Das heißt

$$f = (\mathbb{R}, x \longmapsto |x| + 1, [1, \infty[) \quad (3.50)$$

besitzt in $x_0 = 0$ *keine* Tangenzenzerlegung. Man sagt auch, daß die Funktion in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar (oder ableitbar) ist. Die Funktion hat in $x_0 = 0$ einen "Knick".

In der Praxis ist eine Funktion f mit einem glatten Graphen in x_0 genau dann ableitbar, wenn der Graph von f an dieser Stelle weder einen Knick noch einen Sprung besitzt.

Beispiel:

Wir betrachten Exponentialfunktionen $E_a(x) = a^x$ ($a > 0$) und postulieren ohne Beweis, daß eine Exponentialfunktion E_a im Punkt $x_0 = 0$ eine Tangenzenzerlegung besitzt. Das heißt, für $x_0 = 0$ ist die Funktion differenzierbar. Damit gilt

$$\begin{aligned} E_a(0 + \Delta x) &= a^{0+\Delta x} = a^{\Delta x} \\ &= E_a(0) + E'_a(0) \cdot \Delta x + \Delta x \cdot R(0, \Delta x) \\ &= 1 + E'_a(0) \cdot \Delta x + \Delta x \cdot R(0, \Delta x) \end{aligned} \quad (3.51)$$

($E_a(0) = a^0 = 1$) mit

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} R(0, \Delta x) = 0. \quad (3.52)$$

Für jedes $a \in]0, \infty[$ ist $E'_a(0)$ eine reelle Zahl gleich der Steigung der Tangente in $(0,1)$ an den Graphen. Es gilt

$$\begin{aligned} E'_a(0) &< 0 & \text{wenn } a < 1 \\ E'_a(0) &= 0 & \text{wenn } a = 1 \\ E'_a(0) &> 0 & \text{wenn } a > 1; \end{aligned} \quad (3.53)$$

außerdem haben wir $E'_a(0) > E'_b(0)$ wenn $a > b$. Es muß also auch eine Basiszahl a geben, für die $E'_a(0) = 1$. Diese Zahl heißt e , und für sie gilt

$$E_e(x) = e^x = \exp(x) \text{ und } E'_e(0) = 1. \quad (3.54)$$

Wir können graphisch zeigen, daß $e \approx 2.7$ ist.

Wir kehren zurück zur Bestimmung der Tangenzenzerlegung von E_a in einem willkürlichen Punkt x_0 . Wir haben

$$\begin{aligned} a^{x_0+\Delta x} &= a^{x_0} \cdot a^{\Delta x} \\ &= a^{x_0} (1 + E'_a(0) \cdot \Delta x + \Delta x \cdot R(0, \Delta x)) \\ &= a^{x_0} + a^{x_0} \cdot E'_a(0) \cdot \Delta x + a^{x_0} \cdot \Delta x \cdot R(0, \Delta x). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Wir haben hier den Ausdruck für $a^{\Delta x}$ aus Gln. 3.51 eingesetzt. Wir möchten $E_a(x_0 + \Delta x) = a^{x_0+\Delta x}$ wie folgt ausdrücken:

$$E_a(x_0 + \Delta x) = E_a(x_0) + E'_a(x_0) \cdot \Delta x + \Delta x \cdot R(x_0, \Delta x). \quad (3.56)$$

Vergleichen wir Gln. (3.55) und (3.56), erhalten wir ($E_a(x_0) = a^{x_0}$), bzw.

$$E'_a(x_0) = a^{x_0} \cdot E'_a(0) \quad (3.57)$$

und

$$R(x_0, \Delta x) = a^{x_0} \cdot R(0, \Delta x). \quad (3.58)$$

mit (siehe Gln. (3.52))

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} R(x_0, \Delta x) = a^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} R(0, \Delta x) = 0. \quad (3.59)$$

Also ist E_a in jedem Punkt differenzierbar, wenn E_a für $x_0 = 0$ differenzierbar ist. Wir haben von Gln. (3.57)

$$E'_a(x_0) = a^{x_0} \cdot E'_a(0) = E_a(x_0) \cdot E'_a(0). \quad (3.60)$$

Insbesondere ist

$$E'_e(x_0) = E_e(x_0) \cdot E'_e(0) = E_e(x_0), \quad (3.61)$$

da $E'_e(0) = 1$ ist.

Wie groß ist e ? Wir wissen, daß [Gln. (3.51)]

$$E_e(\Delta x) = e^{\Delta x} = 1 + \Delta x + \Delta x \cdot R(0, \Delta x) \quad (3.62)$$

($E_e(0) = e^0 = 1$ und $E'_e(0) = 1$) mit

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} R(0, \Delta x) = 0. \quad (3.63)$$

Wählen wir $\Delta x = x/n$, wobei x ein konstanter Wert ist. Für $n \rightarrow \infty$ ($n \in \mathbb{N}$) haben wir $\Delta x \rightarrow 0$. Trivialerweise gilt

$$\begin{aligned} e^x &= \left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n = \left(e^{\Delta x}\right)^n \\ &= \left(1 + \Delta x + \Delta x \cdot R(0, \Delta x)\right)^n \\ &= \left(1 + \frac{x}{n} + \frac{x}{n} \cdot R\left(0, \frac{x}{n}\right)\right)^n. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Die Funktion $R(0, x/n)$ erfüllt [Gln. (3.52)]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R\left(0, \frac{x}{n}\right) = 0. \quad (3.65)$$

Man kann nun zeigen, daß wir in Gln. (3.64) den Term mit $R(0, x/n)$ weglassen können, so daß

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad (3.66)$$

ist, und insbesondere gilt

$$e = e^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.71828182845904 \dots \quad (3.67)$$

Wir kennen \ln als die inverse Funktion zu $E_e = \exp$. Damit ist für jedes $a > 0$

$$a = e^{\ln a}, \quad (3.68)$$

so daß

$$E_a(x) = a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \cdot \ln a} = \exp(x \cdot \ln a). \quad (3.69)$$

Jede Exponentialfunktion kann daher auf \exp zurückgeführt werden. Wenn wir also $\exp(x \cdot \ln a)$ differenzieren können, bestimmen wir damit die Ableitung von E_a .

3.3 Allgemeine Eigenschaften der Ableitung - Differentiationsregeln

Betrachten wir nochmals die allgemeine Funktion

$$f = (\mathbb{D}, x \longmapsto f(x), \mathbb{W}). \quad (3.70)$$

Für jeden Punkt $x_0 \in \mathbb{D}$, an dem die Ableitung existiert, rechnen wir $f'(x_0)$ aus. So definieren wir eine neue Funktion

$$f' = (\mathbb{D}', x \longmapsto f'(x), \mathbb{W}'). \quad (3.71)$$

Gegebenfalls muß der Definitionsbereich \mathbb{D} verkleinert werden. Zum Beispiel müssen wir für die Funktion

$$f = (\mathbb{R}, x \longmapsto |x| + 1, [1, \infty[) \quad (3.72)$$

die Ableitung als

$$f' = \left(\mathbb{R} \setminus 0, x \longmapsto \begin{cases} +1 & \text{wenn } x > 0 \\ -1 & \text{wenn } x < 0 \end{cases}, \{-1, +1\} \right) \quad (3.73)$$

definieren.

Betrachten wir jetzt zwei Funktionen

$$\begin{aligned} u &= (\mathbb{D}, x \longmapsto u(x), \mathbb{R}), \\ v &= (\mathbb{D}, x \longmapsto v(x), \mathbb{R}). \end{aligned} \quad (3.74)$$

Wir setzen voraus, daß $u'(x_0)$ und $v'(x_0)$ existieren.

Linearkombination. Mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ definieren wir die *Linearkombination*

$$f = \alpha u + \beta v. \quad (3.75)$$

Es gilt dann

$$f'(x_0) = \alpha u'(x_0) + \beta v'(x_0). \quad (3.76)$$

Zum Beispiel hat das Polynom

$$p(x_0) = a_0 + a_1 \cdot x_0 + a_2 \cdot x_0^2 + a_3 \cdot x_0^3 + \dots + a_n \cdot x_0^n \quad (3.77)$$

die Ableitung

$$p'(x_0) = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot x_0 + 3 \cdot a_3 \cdot x_0^2 + \dots + n \cdot a_n \cdot x_0^{n-1}. \quad (3.78)$$

Produkt. Das Produkt

$$f = u \cdot v \quad (3.79)$$

hat die Ableitung

$$f'(x_0) = (u \cdot v)'(x_0) = u'(x_0) \cdot v(x_0) + u(x_0) \cdot v'(x_0). \quad (3.80)$$

Wir können dieses Ergebnis wie folgt herleiten:

$$\begin{aligned} &(u \cdot v)'(x_0 + \Delta x) \\ &= (u(x_0) + u'(x_0) \cdot \Delta x + \Delta x \cdot R_u(x_0, \Delta x)) \\ &\quad \cdot (v(x_0) + v'(x_0) \cdot \Delta x + \Delta x \cdot R_v(x_0, \Delta x)) \\ &= u(x_0) \cdot v(x_0) + [u'(x_0) \cdot v(x_0) + u(x_0) \cdot v'(x_0)] \cdot \Delta x \\ &\quad + \Delta x \cdot \left[u(x_0) \cdot R_v(x_0, \Delta x) + u'(x_0) \cdot R_v(x_0, \Delta x) \cdot \Delta x \right. \\ &\quad \left. + v(x_0) \cdot R_u(x_0, \Delta x) + v'(x_0) \cdot R_u(x_0, \Delta x) \cdot \Delta x \right. \\ &\quad \left. + u'(x_0) \cdot v'(x_0) \cdot \Delta x + R_u(x_0, \Delta x) \cdot R_v(x_0, \Delta x) \cdot \Delta x \right]. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Diese Gleichung zeigt, daß Gln. (3.80) erfüllt ist, wenn der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[u(x_0) \cdot R_v(x_0, \Delta x) + u'(x_0) \cdot R_v(x_0, \Delta x) \cdot \Delta x \right. \\ \left. + v(x_0) \cdot R_u(x_0, \Delta x) + v'(x_0) \cdot R_u(x_0, \Delta x) \cdot \Delta x \right. \\ \left. + u'(x_0) \cdot v'(x_0) \cdot \Delta x + R_u(x_0, \Delta x) \cdot R_v(x_0, \Delta x) \cdot \Delta x \right] = 0 \quad (3.82)$$

ist. Dieses ist aber der Fall, da

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} R_u(x_0, \Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} R_v(x_0, \Delta x) = 0 \quad (3.83)$$

ist.

Die Funktion

$$f(x) = \sin^2 x = \sin x \cdot \sin x \quad (3.84)$$

hat damit die Ableitung

$$f'(x) = \cos x \cdot \sin x + \sin x \cdot \cos x = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x. \quad (3.85)$$

Reziproke Funktion. Die reziproke Funktion $\frac{1}{f}$ erfüllt die Gleichung

$$f(x_0) \cdot \left(\frac{1}{f} \right) (x_0) = 1. \quad (3.86)$$

Differentiation dieses Produktes ergibt

$$f'(x_0) \cdot \left(\frac{1}{f} \right) (x_0) + f(x_0) \cdot \left(\frac{1}{f} \right)' (x_0) = 0 \quad (3.87)$$

und damit

$$\left(\frac{1}{f} \right)' (x_0) = - \frac{f'(x_0) \cdot \left(\frac{1}{f} \right) (x_0)}{f(x_0)} = - \frac{f'(x_0)}{[f(x_0)]^2}. \quad (3.88)$$

Mit

$$h_{-n} = \frac{1}{h_n} \quad (3.89)$$

ist

$$h'_{-n} = - \frac{h'_n}{h_n \cdot h_n}. \quad (3.90)$$

Wir haben

$$h_n(x) = x^n \quad (3.91)$$

und damit

$$h_{-n}(x) = x^{-n} \quad \text{und} \quad h'_{-n}(x) = n \cdot x^{n-1}. \quad (3.92)$$

Also gilt

$$h'_{-n}(x) = -\frac{n \cdot x^{n-1}}{x^n \cdot x^n} = -n \cdot x^{-n-1}. \quad (3.93)$$

Quotient. Die Funktion

$$f = \frac{u}{v} \quad (3.94)$$

hat die Ableitung

$$f' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}. \quad (3.95)$$

Wir schreiben $f(x_0)$ als ein Produkt

$$f(x_0) = u(x_0) \cdot \frac{1}{v(x_0)}. \quad (3.96)$$

Der Definitionsbereich \mathbb{D} von f muß so gewählt werden, daß für alle $x_0 \in \mathbb{D}$, $v(x_0) \neq 0$ ist. Die Differentiation des Produktes ergibt

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= u'(x_0) \cdot \frac{1}{v(x_0)} + u(x_0) \cdot \left(\frac{1}{v(x_0)} \right)' \\ &= u'(x_0) \cdot \frac{1}{v(x_0)} + u(x_0) \cdot \left(-\frac{v'(x_0)}{[v(x_0)]^2} \right) \\ &= \frac{u'(x_0) \cdot v(x_0) - u(x_0) \cdot v'(x_0)}{[v(x_0)]^2}. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Für die Funktion $\tan = \sin / \cos$ gilt

$$\tan'(x_0) = \frac{\cos x_0 \cdot \cos x_0 + \sin x_0 \cdot \sin x_0}{\cos^2 x_0} = \frac{1}{\cos^2 x_0}. \quad (3.98)$$

Zusammengesetzte Funktionen. Betrachten wir nun

$$f = v \circ u \quad (3.99)$$

mit

$$\begin{aligned} u &= (\mathbb{I}, x \longmapsto u(x), \mathbb{W}) \\ v &= (\mathbb{W}, y \longmapsto v(y), \mathbb{R}). \end{aligned} \quad (3.100)$$

Wir setzen voraus, daß u in x_0 differenzierbar ist, und daß v in $y_0 = u(x_0)$ differenzierbar ist. Dann ist

$$f'(x_0) = (v \circ u)'(x_0) = v'(u(x_0)) \cdot u'(x_0). \quad (3.101)$$

Dieses Ergebnis ist als die *Kettenregel* bekannt. Wir haben

$$[v(u(x))]' = v'(u(x)) \cdot u'(x). \quad (3.102)$$

Hier wird $v'(u(x))$ als die *äußere Ableitung* und $u'(x)$ als die *innere Ableitung* bezeichnet.

Beispiele:

Ist die Funktion

$$f(x) = \sin(3x^3 + 5x), \quad (3.103)$$

so lautet ihre Ableitung

$$f'(x) = \cos(3x^3 + 5x) \cdot (9x^2 + 5) \quad (3.104)$$

Ist die Funktion

$$f(x) = \sin^2 x, \quad (3.105)$$

so lautet ihre Ableitung

$$f'(x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \sin 2x. \quad (3.106)$$

Zur Funktion

$$f(x) = e^{x \cdot \ln a} = a^x \quad (3.107)$$

gehört die Ableitung

$$f'(x) = e^{x \cdot \ln a} \cdot \ln a = \ln a \cdot a^x. \quad (3.108)$$

Inverse Funktion. Eine Funktion f muß nicht notwendigerweise eine inverse Funktion f^{-1} besitzen. Existiert aber die Funktion f^{-1} , dann erfüllt sie die Gleichung

$$(f^{-1} \circ f)(x_0) = x_0 \quad (3.109)$$

oder

$$f^{-1}(f(x_0)) = x_0 \quad (3.110)$$

Differentiation der beiden Seiten von Gln. (3.110) ergibt

$$(f^{-1})'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = 1. \quad (3.111)$$

Setzen wir $y_0 = f(x_0)$, so ist $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Mit diesen Definitionen erhalten wir aus Gln. (3.111)

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}. \quad (3.112)$$

Beispiele:

a) Wir definieren

$$f = ([0, \infty[, x \longmapsto f(x) = x^2, [0, \infty[) \quad (3.113)$$

und erhalten

$$f^{-1} = ([0, \infty[, y \longmapsto f^{-1}(y) = \sqrt{y}, [0, \infty[) \quad (3.114)$$

Wir haben

$$f'(x) = 2 \cdot x \quad (3.115)$$

und erhalten aus Gln. (3.112)

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(\sqrt{y_0})} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{y_0}}. \quad (3.116)$$

b) Die "eingeschränkte" Sinusfunktion

$$\sin = \left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], x \longmapsto \sin x, [-1, 1] \right), \quad (3.117)$$

besitzt die inverse Funktion

$$\sin^{-1} = \arcsin = \left([-1, 1], x \longmapsto \arcsin x, \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right). \quad (3.118)$$

Gleichung (3.112) liefert hier

$$\arcsin'(y_0) = \frac{1}{\cos(\arcsin(y_0))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(y_0))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y_0^2}}. \quad (3.119)$$

c) Die Exponentialfunktion

$$\exp = (\mathbb{R}, x \longmapsto e^x,]0, \infty[), \quad (3.120)$$

besitzt die inverse Funktion

$$\ln = (]0, \infty[, x \longmapsto \ln x, \mathbb{R}). \quad (3.121)$$

Gleichung (3.112) liefert hier

$$\ln'(y_0) = \frac{1}{\exp(\ln(y_0))} = \frac{1}{y_0}. \quad (3.122)$$

Anmerkung:

Die Funktion

$$f(x) = x^\alpha, \quad (3.123)$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ eine willkürliche, reelle Zahl ist, hat die Ableitung

$$f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}. \quad (3.124)$$

Es ist instruktiv, die folgenden Ableitungen zusammenzustellen

$f(x)$	x^{-3}	x^{-2}	x^{-1}	x^0	$\ln x$	x^1	x^2	x^3
$f'(x)$	$-3 \cdot x^{-4}$	$-2 \cdot x^{-3}$	$-x^{-2}$	0	x^{-1}	$1 \cdot x^0$	$2 \cdot x$	$3 \cdot x^2$

3.4 Höhere Ableitungen und Taylorreihen

Der Graph der “Tangentenfunktion”

$$f_T(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad (3.125)$$

geht durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ und approximiert in der unmittelbaren Nähe dieses Punktes $x \mapsto f(x)$. Die Frage ist nun: Können wir eine bessere Vergleichsfunktion finden, die $x \mapsto f(x)$ besser (das heißt, mit einem kleineren Fehler bei einem gegebenen Wert von x) als f_T approximiert? Es bietet sich an, $x \mapsto f(x)$ durch eine Parabel zu approximieren:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + a \cdot \Delta x + b \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^2 \cdot R_2(x_0, \Delta x), \quad (3.126)$$

wobei wir, analog zur Tangenzenzerlegung, die Werte von a und b so bestimmen möchten, daß

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} R_2(x_0, \Delta x) = 0 \quad (3.127)$$

ist. Es ist sofort klar, daß wie bisher $a = f'(x_0)$ ist. Wir können nämlich die Restfunktion

$$R_1(x_0, \Delta x) = b \cdot \Delta x + \Delta x \cdot R_2(x_0, \Delta x) \quad (3.128)$$

bilden und erhalten dann aus Gln. (3.126)

$$f(x + \Delta x) = f(x_0) + a \cdot \Delta x + \Delta x \cdot R_1(x_0, \Delta x). \quad (3.129)$$

Ist Gln. (3.127) erfüllt, ist auch

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} R_1(x_0, \Delta x) = 0, \quad (3.130)$$

und Gln. (3.129) ist die gewöhnliche Tangenzenzerlegung von f mit $a = f'(x_0)$.

Man kann zeigen, daß

$$b = \frac{1}{2}(f')'(x_0) = \frac{1}{2}f''(x_0) \quad (3.131)$$

ist. Die Funktion f'' ist die Ableitung von f' und damit die *zweite Ableitung* von f . Andere Schreibweisen für diese Funktion sind $\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=x_0}$, $\left. \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right) \right|_{x=x_0}$ und $\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}$.

Falls $f'(x_0)$ und $f''(x_0)$ beide existieren (das heißt, falls sowohl f als auch f' an der Stelle x_0 differenzierbar sind), haben wir

$$f(x + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x + \frac{1}{2}f''(x_0) \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^2 \cdot R_2(x_0, \Delta x), \quad (3.132)$$

und Gln. (3.127) ist erfüllt. Die Funktion

$$f_{T2}(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2 \quad (3.133)$$

nennt man die *Taylorentwicklung 2. Ordnung* für f in x_0 .

Taylorentwicklungen höherer Ordnung:

Setzen wir voraus, daß die Funktion $x \longmapsto f(x)$ in einem Intervall \mathbb{I} $(n + 1)$ mal stetig differenzierbar ist. Das heißt, für alle Werte von $x_0 \in \mathbb{I}$ existieren die Ableitungen

$$\begin{aligned} f'(x_0) &\equiv f^{(1)}(x_0), f''(x_0) \equiv f^{(2)}(x_0), f'''(x_0) \equiv f^{(3)}(x_0), \dots \\ f^{''\dots'}(x_0) &\equiv f^{(n)}(x_0), f^{''\dots''}(x_0) \equiv f^{(n+1)}(x_0), \end{aligned}$$

und diese Funktionen sind alle stetig. Dann gilt für $x_0 \in \mathbb{I}$ und $x_0 + \Delta x \in \mathbb{I}$

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x + \frac{1}{2!} f''(x_0) \cdot (\Delta x)^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_0) \cdot (\Delta x)^3 \\ &+ \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \cdot (\Delta x)^n + (\Delta x)^n \cdot R_n(x_0, \Delta x) \\ &= f(x_0) + \sum_{k=1}^n f^{(k)}(x_0) \cdot \frac{(\Delta x)^k}{k!} + (\Delta x)^n \cdot R_n(x_0, \Delta x) \\ &= \sum_{k=0}^n f^{(k)}(x_0) \cdot \frac{(\Delta x)^k}{k!} + (\Delta x)^n \cdot R_n(x_0, \Delta x). \end{aligned} \quad (3.134)$$

Anmerkungen

- a) Es existiert eine reelle Zahl $\xi \in [x_0, x_0 + \Delta x]$ so, daß man die Funktion $R_n(x_0, \Delta x)$ als

$$R_n(x_0, \Delta x) = \frac{\Delta x}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\xi) \quad (3.135)$$

ausdrücken kann. Diese Funktion erfüllt Gln. (3.127).

- b) Mit $x_0 + \Delta x = x$ bzw. $\Delta x = x - x_0$ schreibt man die *Taylorentwicklung n-ter Ordnung* für f in x_0 als

$$f_{Tn}(x) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(x_0) \cdot \frac{(x - x_0)^k}{k!}. \quad (3.136)$$

- c) Im Sonderfall $x_0 = 0$ heißt diese Reihe die *MacLaurin'sche Reihe*

$$f_{Mn}(x) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(0) \cdot \frac{x^k}{k!}. \quad (3.137)$$

- d) Ist eine Funktion f für $x_0 = 0$ beliebig oft differenzierbar, kann der Funktionswert $f(x)$ an einer beliebigen Stelle $x \in \mathbb{R}$ als die “unendliche” MacLaurin’sche Reihe

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n f^{(k)}(0) \cdot \frac{x^k}{k!} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0) \cdot \frac{x^k}{k!} \quad (3.138)$$

berechnet werden. Eine wichtige Anwendung dieses Ergebnisses stellt der Ausdruck

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (3.139)$$

dar; hier ist

$$f^{(k)}(0) = \exp^{(k)}(0) = e^0 = 1. \quad (3.140)$$

Beispiel

Wir wollen die MacLaurin’sche Reihe 3. Ordnung für die Funktion $f(x) = \sqrt{x+1}$ aufstellen. Es gilt

$$\begin{array}{ll} f(x) &= \sqrt{x+1} & f(0) &= 1, \\ f'(x) &= \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2} & f'(0) &= \frac{1}{2}, \\ f''(x) &= -\frac{1}{4}(x+1)^{-3/2} & f''(0) &= -\frac{1}{4}, \\ f'''(x) &= \frac{3}{8}(x+1)^{-5/2} & f'''(0) &= \frac{3}{8}. \end{array}$$

Damit lautet die MacLaurin’sche Reihe 3. Ordnung

$$f_{M3}(x) = 1 + \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{8} \cdot x^2 + \frac{1}{16} \cdot x^3. \quad (3.141)$$

Abbildung 3.4 zeigt die Graphen der Funktionen f und f_{M3} .

3.5 Anwendungen der Ableitung

Unbestimmte Ausdrücke

Betrachten wir eine Quotient-Funktion

$$x \longmapsto f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}. \quad (3.142)$$

In einem bestimmten Punkt x_0 gilt $u(x_0) = v(x_0) = 0$. Besitzt $f(x)$ im Punkt x_0 einen Grenzwert? Beispiele für die Funktion f sind

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1} \text{ mit } x_0 = 1 \quad (3.143)$$

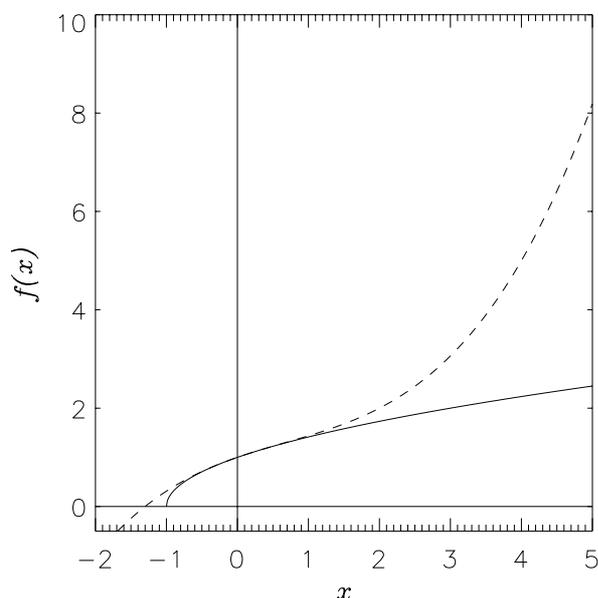


Abbildung 3.4: Die Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{x+1}$ (durchgezogene Kurve) und ihrer MacLaurin'schen Reihe 3. Ordnung (gestrichelte Kurve); siehe Gln. (3.141).

und

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{x} \quad \text{mit } x_0 = 0. \quad (3.144)$$

Besitzen die beiden Funktionen u und v Tangentenerlegungen im Punkt x_0 , so haben wir

$$u(x_0 + \Delta x) = u(x_0) + u'(x_0) \cdot \Delta x + \Delta x \cdot R_u(x_0, \Delta x) \quad (3.145)$$

$$v(x_0 + \Delta x) = v(x_0) + v'(x_0) \cdot \Delta x + \Delta x \cdot R_v(x_0, \Delta x) \quad (3.146)$$

Da $u(x_0) = v(x_0) = 0$ sind, gilt

$$f(x_0 + \Delta x) = \frac{u(x_0 + \Delta x)}{v(x_0 + \Delta x)} = \frac{u'(x_0) + R_u(x_0, \Delta x)}{v'(x_0) + R_v(x_0, \Delta x)}. \quad (3.147)$$

Folglich ist der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u'(x_0) + R_u(x_0, \Delta x)}{v'(x_0) + R_v(x_0, \Delta x)} = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}. \quad (3.148)$$

Für $v'(x_0) \neq 0$ besitzt f im Punkt x_0 einen endlichen Grenzwert, für $u'(x_0) \neq 0$ und $v'(x_0) = 0$ besitzt f im Punkt x_0 keinen (endlichen) Grenzwert, und für $u'(x_0) = 0$

und $v'(x_0) = 0$ müssen wir den gesamten Vorgang wiederholen (indem wir u durch u' und v durch v' ersetzen), um Aussagen über den Grenzwert machen zu können.

Für unsere Beispielfunktionen ergibt sich

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2}{1} = 3 \quad (3.149)$$

und

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{1} = 0. \quad (3.150)$$

Die Regel in Gln. (3.148) (von *l'Hôpital*) ist auch für unbekannte Ausdrücke vom Typ $\frac{\infty}{\infty}$ direkt anwendbar. Zum Beispiel gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x + 3}{6x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x + 4}{12x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{12} = \frac{1}{2}. \quad (3.151)$$

Für Ausdrücke vom Typ $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$ und 0^0 ist *l'Hôpital's* Regel nach geeigneter Umformung einsetzbar. Zum Beispiel gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0. \quad (3.152)$$

Mit Gln. (3.152) bestimmen wir den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^x) = \lim_{x \rightarrow 0} (e^{\ln x})^x = \lim_{x \rightarrow 0} (e^{x \cdot \ln x}) = e^0 = 1. \quad (3.153)$$

Dieses Ergebnis war bereits in der Abbildung 2.9 erkennbar.

Charakteristische Kurvenpunkte

Abbildung 3.5 zeigt die *charakteristischen Punkte* des Graphen einer Funktion f :

- *Nullstellen* sind die Punkte x_0 , für die $f(x_0) = 0$ ist.
- *Extrema (Minima und Maxima)* sind die Punkte x_E , für die gilt, daß alle benachbarten Funktionswerte größer oder kleiner zu $f(x_E)$ sind.
- *Wendepunkte* sind die Punkte, bei denen der Graph von einer Rechtskurve in eine Linkskurve (oder umgekehrt) wechselt.

In einem Extremum x_E hat der Graph einer Funktion f eine waagerechte Tangente. Folglich ist in einem solchen Punkt $f'(x_E) = 0$. Umgekehrt ist ein Punkt x_0 mit $f'(x_0) = 0$ nicht notwendigerweise ein Extremum. Betrachten wir zum Beispiel die Funktionen $h_3(x) = x^3$ und $h_4(x) = x^4$. Es gilt $h_3'(x) = 3 \cdot x^2$ sowie $h_4'(x) = 4 \cdot x^3$ und damit $h_3'(0) = h_4'(0) = 0$. Die Funktion h_3 hat jedoch kein Extremum für x

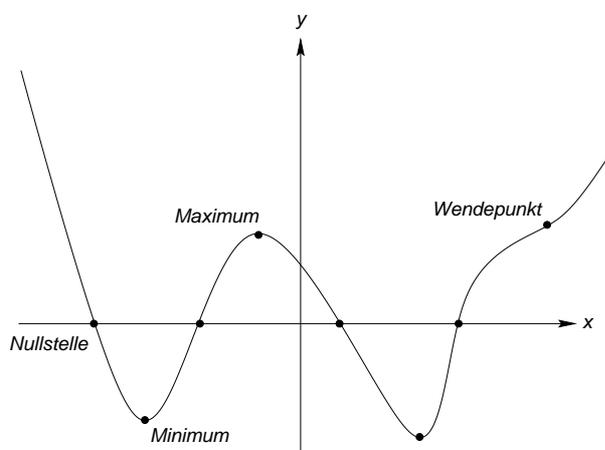


Abbildung 3.5: Charakteristische Punkte des Graphen einer Funktion f .

= 0, sondern einen Wendepunkt, während die Funktion h_4 für $x = 0$ ein Minimum besitzt.

Wir formulieren jetzt die genauen Bedingungen für Extrem- bzw. Wendepunkte. $f(x)$ sei eine in einer Umgebung der Stelle ξ k -mal stetig differenzierbare Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

- die ersten $(n - 1)$ Ableitungen der Funktion an der Stelle ξ verschwinden, das heißt $f'(\xi) = f''(\xi) = \dots f^{(n-1)}(\xi) = 0$.
- die n -te Ableitung ist ungleich Null, $f^{(n)}(\xi) \neq 0$ ($2 \leq n \leq k$).

Ist nun n gerade, hat $f(x)$ an der Stelle ξ ein

- Maximum, falls $f^{(n)}(\xi) < 0$ ist, bzw.
- Minimum, falls $f^{(n)}(\xi) > 0$ ist.

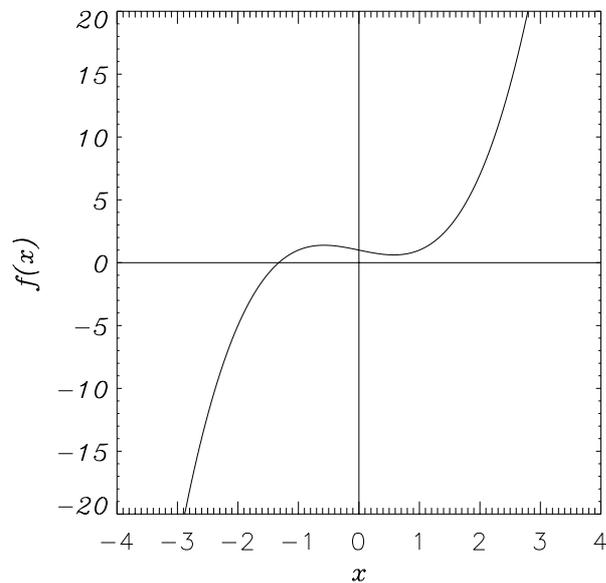
Ist n ungerade, liegt ein Wendepunkt vor.

Der Beweis für diesen Satz kann über die Taylorentwicklung geführt werden.

Betrachten wir wieder die beiden Funktionen $h_3(x) = x^3$ und $h_4(x) = x^4$. Für h_3 gilt

$$\begin{aligned} h_3(x) &= x^3 & h_3'(0) &= 0, \\ h_3'(x) &= 3 \cdot x^2 & h_3''(0) &= 0, \\ h_3''(x) &= 6 \cdot x & h_3'''(0) &= 6, \\ h_3'''(x) &= 6 \end{aligned}$$

Hier ist also $n = 3$, und da 3 ungerade ist, liegt für h_3 im Punkt 0 ein Wendepunkt vor.

Abbildung 3.6: Der Graph der Funktion $f(x) = x^3 - x + 1$.

Für h_4 gilt

$$\begin{aligned}
 h_4(x) &= x^4 & h_4'(0) &= 0, \\
 h_4'(x) &= 4 \cdot x^3 & h_4''(0) &= 0, \\
 h_4''(x) &= 12 \cdot x^2 & h_4'''(0) &= 6, \\
 h_4'''(x) &= 24 \cdot x & h_4''''(0) &= 24, \\
 h_4''''(x) &= 24 & &
 \end{aligned}$$

Hier ist $n = 4$, das heißt gerade, und da $h_4''''(0) > 0$ ist, liegt ein Minimum vor.

Eine Voraussetzung für einen Wendepunkt ist $f''(x_W) = 0$. Diese Bedingung ist aber nicht hinreichend, wie wir im Falle h_4 im Punkt 0 gesehen haben.

Nullstellen

Wir suchen die Stellen x_i , für die $f(x_i) = 0$ ist. Es gibt verschiedene Lösungsmöglichkeiten:

- a) Elementares "Berechnen" der x_i . Vielleicht können wir die Gleichung $f(x_i) = 0$ in einfacher Weise nach x_i auflösen. Zum Beispiel besitzt $f(x) = x^2 - 4$ mit

$$f(x_i) = x_i^2 - 4 = 0 \quad (3.154)$$

die Lösungen $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

- b) Auch wenn wir nicht formal nach x_i auflösen können, kennen wir vielleicht die Lösungen. Die Nullstellen x_i der Funktion

$$f(x) = \sin x - \cos x \quad (3.155)$$

erfüllen die Gleichung

$$\sin x_i = \cos x_i. \quad (3.156)$$

Abbildung 2.4 zeigt, daß diese Bedingung für

$$x_i = i \cdot \pi + \frac{\pi}{4} = (4i + 1) \frac{\pi}{4}, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.157)$$

erfüllt ist.

- c) Wir können eine Lösung durch *Intervallhalbierung* bestimmen. Abbildung 3.6 zeigt den Graphen der Funktion

$$f(x) = x^3 - x + 1. \quad (3.158)$$

Diese Funktion hat eine Nullstelle im Intervall $]x_N, x_H[=] - 2, -1[$, da $f(-2) = -5$ und $f(-1) = 1$ sind. Wir berechnen den Mittelpunkt des Intervalles

$$x_M = \frac{x_H + x_N}{2} = \frac{-1 - 2}{2} = -1.5. \quad (3.159)$$

Der Funktionswert $f(x_M) = f(-1.5) = -0.875$, das heißt, $f(x_M)$ ist negativ. Folglich wissen wir jetzt, daß die Nullstelle im Intervall $] - 1.5, -1[$ liegt, da wir ja $f(-1) = 1$ haben. Setzen wir also $x_N = -1.5$ und $x_H = -1$ und berechnen wir nochmals

$$x_M = \frac{x_H + x_N}{2} = \frac{-1 - 1.5}{2} = -1.25. \quad (3.160)$$

Der Funktionswert $f(x_M) = f(-1.25) = 0.297 > 0$. Also wissen wir, daß die Nullstelle im Intervall $] - 1.5, -1.25[$ liegt. Dieses Intervall kann jetzt halbiert und der Vorgang wiederholt werden. Tabelle 3.1 zeigt die Bestimmung der Nullstelle durch Intervallhalbierung. Die Berechnung wurde mit einem Computer durchgeführt. Das Programm lief, bis ein Wert von x_M bestimmt wurde, für den $|f(x_M)| < 10^{-5}$ ist. In der letzten Zeile der Tabelle erkennen wir, daß $f(-1.324718) = -0.221 \times 10^{-5}$ ist. Der Wert $x_0 = -1.324718$ ist also ein guter Näherungswert für die Nullstelle.

- d) Wir können eine Lösung durch *Newton-Raphson-Iteration* bestimmen. Nehmen wir an, daß wir den ungefähren Wert x_1 einer Nullstelle kennen. Approximieren wir die Funktion durch ihre Tangenzerlegung an der Stelle x_1

$$f_T(x) = f(x_1) + f'(x_1) \cdot (x - x_1), \quad (3.161)$$

so können wir einen genaueren Wert x_2 für die Nullstelle dadurch berechnen, daß wir die approximative Gleichung

$$f_T(x_2) = f(x_1) + f'(x_1) \cdot (x_2 - x_1) = 0 \quad (3.162)$$

lösen. Die Lösung ist

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \quad (3.163)$$

Wir approximieren jetzt die Funktion durch ihre Tangenzenzerlegung an der Stelle x_2

$$f_T(x) = f(x_2) + f'(x_2) \cdot (x - x_2) \quad (3.164)$$

und berechnen einen genaueren Wert für die Nullstelle x_3 als

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}. \quad (3.165)$$

Mit

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (3.166)$$

wird der Vorgang wiederholt, bis $|f(x_{n+1})|$ "klein genug" ist. Dieses Verfahren wird als *Newton-Raphson-Iteration* bezeichnet.

Die Funktion in Gln. (3.158) besitzt die Ableitung

$$f'(x) = 3 \cdot x^2 - 1. \quad (3.167)$$

Wir wissen, daß eine Nullstelle in der Nähe von $x_1 = -1.5$ liegt. In Tabelle 3.2 zeigen wir das Ergebnis einer Newton-Raphson-Iteration für die Funktion in Gln. (3.158).

Table 3.1

Die Bestimmung der Nullstelle der Funktion f mittels Intervallhalbierung

	x_N	$f(x_N)$	x_H	$f(x_H)$	x_M	$f(x_M)$
1	-2.000000	-0.500E+01	-1.000000	0.100E+01	-1.500000	-0.875E+00
2	-1.500000	-0.875E+00	-1.000000	0.100E+01	-1.250000	0.297E+00
3	-1.500000	-0.875E+00	-1.250000	0.297E+00	-1.375000	-0.225E+00
4	-1.375000	-0.225E+00	-1.250000	0.297E+00	-1.312500	0.515E-01
5	-1.375000	-0.225E+00	-1.312500	0.515E-01	-1.343750	-0.826E-01
6	-1.343750	-0.826E-01	-1.312500	0.515E-01	-1.328125	-0.146E-01
7	-1.328125	-0.146E-01	-1.312500	0.515E-01	-1.320312	0.187E-01
8	-1.328125	-0.146E-01	-1.320312	0.187E-01	-1.324219	0.213E-02
9	-1.328125	-0.146E-01	-1.324219	0.213E-02	-1.326172	-0.621E-02
10	-1.326172	-0.621E-02	-1.324219	0.213E-02	-1.325195	-0.204E-02
11	-1.325195	-0.204E-02	-1.324219	0.213E-02	-1.324707	0.466E-04
12	-1.325195	-0.204E-02	-1.324707	0.466E-04	-1.324951	-0.995E-03
13	-1.324951	-0.995E-03	-1.324707	0.466E-04	-1.324829	-0.474E-03
14	-1.324829	-0.474E-03	-1.324707	0.466E-04	-1.324768	-0.214E-03
15	-1.324768	-0.214E-03	-1.324707	0.466E-04	-1.324738	-0.836E-04
16	-1.324738	-0.836E-04	-1.324707	0.466E-04	-1.324722	-0.185E-04
17	-1.324722	-0.185E-04	-1.324707	0.466E-04	-1.324715	0.141E-04
18	-1.324722	-0.185E-04	-1.324715	0.141E-04	-1.324718	-0.221E-05

Table 3.2

Die Bestimmung der Nullstelle der Funktion f mittels Newton-Raphson-Iteration

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}	$f(x_{n+1})$
1	-1.500000	-0.875E+00	0.575E+01	-1.347826	-0.101E+00
2	-1.347826	-0.101E+00	0.445E+01	-1.325200	-0.206E-02
3	-1.325200	-0.206E-02	0.427E+01	-1.324718	-0.925E-06

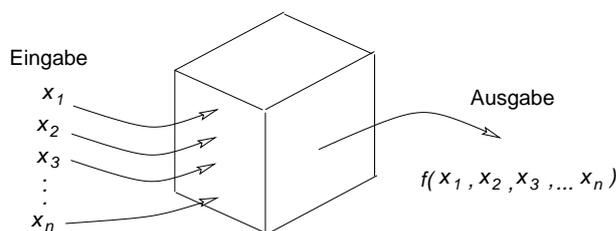


Abbildung 4.1: Das Prinzip eines “Zuordnungs-Automaten” für n Variable.

4 Funktionen mehrerer reeller Veränderlichen

4.1 Allgemeines

Im Kapitel 3 dieses Scriptums beschäftigten wir uns mit reellen Funktionen einer reellen Veränderlichen. Um eine solche Funktion zu definieren, müssen wir ihren Definitionsbereich \mathbb{D} festlegen, die Zuordnungsvorschrift $x \longmapsto f(x)$ angeben und wir müssen den daraus folgenden Wertebereich \mathbb{W} bestimmen. Für die Funktionen, die wir im Kapitel 3 betrachteten, waren der Definitionsbereich \mathbb{D} und der Wertebereich \mathbb{W} immer die Menge \mathbb{R} oder Teilmengen davon. Wir erweitern jetzt den Funktionsbegriff so, daß wir auch solche Funktionen zulassen, die von mehreren reellen Veränderlichen abhängen, aber immer noch einen reellen Wert liefern. Abbildung 4.1 erklärt das Prinzip einer solchen Funktion f , die von n reellen Variablen $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ abhängt.

Ein Beispiel für eine Funktion zweier reeller Variablen erhalten wir aus der Thermodynamik. Ein nicht-ideales Gas kann die Zustandsgleichung

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT \quad (4.1)$$

erfüllen. Hier ist p der Druck des Gases, V ist sein Volumen, T ist seine absolute Temperatur und R , a und b sind Konstanten (R ist die Gaskonstante). Wir erhalten

$$p = p(T, V) = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2}. \quad (4.2)$$

Der Druck p ist also eine Funktion der beiden Variablen V und T .

Für die in der Abbildung 4.1 dargestellte Funktion ist der Definitionsbereich eine Punktmenge im \mathbb{R}^n . Zum Beispiel ist also für die Funktion $p(T, V)$ in Gln. (4.2) der Definitionsbereich \mathbb{D} eine Teilmenge von \mathbb{R}^2 , nämlich die Teilmenge $\{(T, V) \in \mathbb{R}^2; T \geq 0 \text{ und } V \geq 0\}$. Ist für eine solche Funktion zweier reeller Variablen der Definitionsbereich eine Teilmenge von \mathbb{R}^2 , und kann man diese Teilmenge in einem (x_1, x_2) Kartesischen Koordinatensystem so zeichnen, daß er von einer einzigen geschlossenen Kurve umrandet ist, heißt sie *einfach zusammenhängend*. Ansonsten

spricht man von *mehrfach zusammenhängenden* Definitionsbereichen. Die Wertebereiche der in diesem Kapitel betrachteten Funktionen sind \mathbb{R} oder Teilmengen davon.

Die Darstellung einer Funktion mehrerer reeller Veränderlichen kann *explizit*, das heißt in der Form

$$u = f(x_1, x_2, x_3, \dots) \quad (4.3)$$

sein. Zum Beispiel ist Gln. (4.2) eine explizite Darstellung der Funktion $p(T, V)$. Eine *implizite* Darstellung hat die Form

$$F(x_1, x_2, x_3, \dots, u) = 0. \quad (4.4)$$

Die Gleichung

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) - RT = 0 \quad (4.5)$$

(siehe Gln. (4.1)) ist eine implizite Darstellung der Funktion $p(T, V)$.

Es gibt drei Möglichkeiten eine Funktion zweier Veränderlicher $u = f(x, y)$, graphisch darzustellen.

- a) Eine “dreidimensionale” Darstellung als Punkte im \mathbb{R}^3 ; siehe Abbildung 4.2.
- b) Eine “zweidimensionale” Darstellung als Kurvenschar in einem (x, u) -Diagramm. Die Funktion $u = f(x, y_0)$ wird für verschiedene Werte von y_0 gezeichnet. Siehe Abbildung 4.3.
- c) Eine “zweidimensionale” Darstellung mit “Höhenlinien”; siehe Abbildung 4.4.

Abbildung 4.5 zeigt eine Anwendung aus dem wirklichen Leben.

Der *Grenzwert* einer Funktion zweier Veränderlichen soll hier nur “anschaulich” beschrieben werden:

Eine Funktion $f(x, y)$ besitzt an der Stelle (ξ, η) den Grenzwert g , wenn man sich längs beliebiger Wege dem Punkt (ξ, η) und dabei stets denselben Wert g nähert.

Betrachten wir die Funktion

$$u = f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}. \quad (4.6)$$

Der Definitionsbereich für diese Funktion ist $\mathbb{D} = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$. Das heißt, daß der Punkt $(\xi, \eta) = (0, 0) \notin \mathbb{D}$ ist. Nähern wir uns dem Punkt $(0, 0)$ entlang der x -Achse, so haben wir $(x, y) = (\epsilon, 0)$. Es gilt

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(\epsilon, 0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon \cdot 0}{\epsilon^2 + 0^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 0 = 0. \quad (4.7)$$

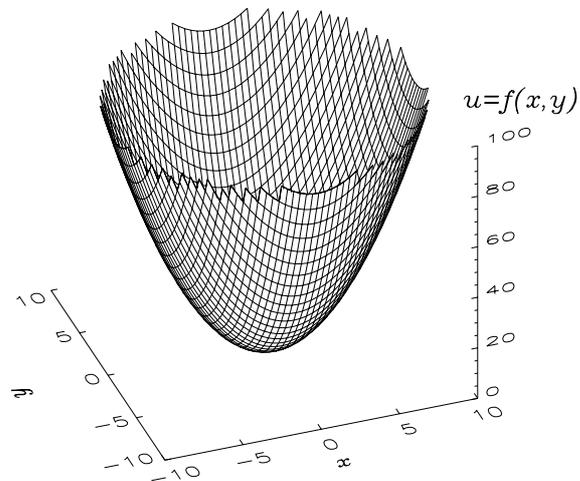


Abbildung 4.2: Die Funktion $u = f(x, y) = x^2 + y^2$ dreidimensional dargestellt.

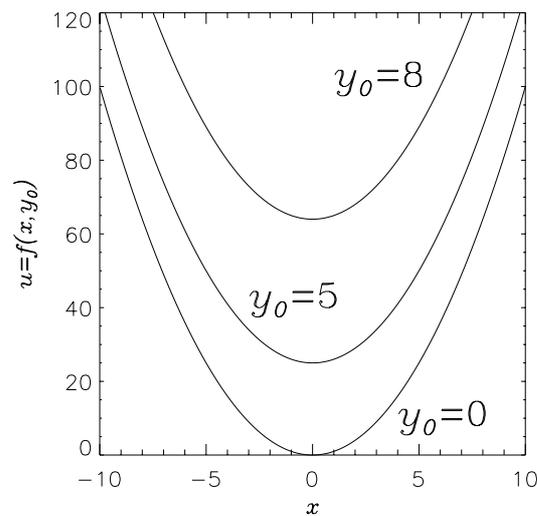


Abbildung 4.3: Die Funktionen $u = f(x, y_0) = x^2 + y_0^2$ für $y_0 = 0, 5, 8$.

Nähern wir uns dem Punkt $(0, 0)$ entlang der Winkelhalbierenden $x = y$, so haben wir $(x, y) = (\epsilon, \epsilon)$, und damit

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(\epsilon, \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 + \epsilon^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \quad (4.8)$$

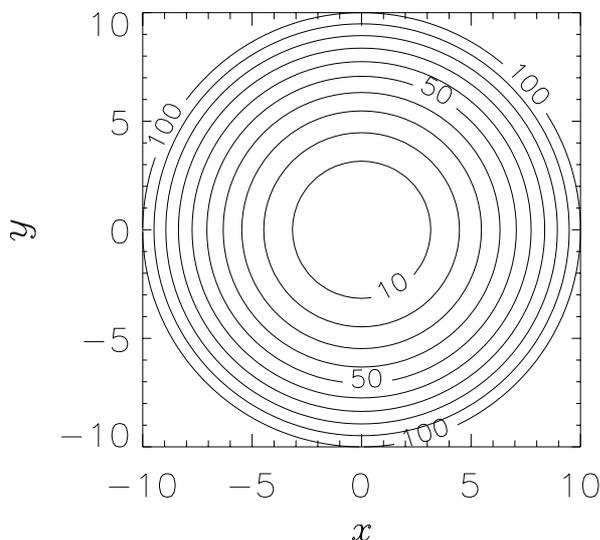


Abbildung 4.4: Die Funktion $u = f(x, y) = x^2 + y^2$ dargestellt mittels Höhenlinien für $u = 10, 20, 30, \dots, 100$.

Die Funktion in Gln. (4.6) besitzt also *keinen* Grenzwert im Punkt $(0, 0)$.

Eine Funktion $f(x, y)$ ist *stetig* in (ξ, η) , wenn sowohl

- der Funktionswert $f(\xi, \eta) = g$ definiert ist, als auch
- der Grenzwert in (ξ, η) existiert und gleich g ist.

4.2 Partielle Ableitungen

Betrachten wir als Beispiel die Funktion

$$f(x, y) = x^2 \cdot y. \quad (4.9)$$

Indem wir zunächst $y = y_0$ als eine Konstante auffassen, können wir eine Tangenzerlegung dieser Funktion im Punkt (x_0, y_0) durchführen

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0) &= (x_0 + \Delta x)^2 \cdot y_0 = x_0^2 \cdot y_0 + 2 \cdot x_0 \cdot y_0 \cdot \Delta x + \Delta x \cdot (\Delta x \cdot y_0) \\ &= x_0^2 \cdot y_0 + 2 \cdot x_0 \cdot y_0 \cdot \Delta x + \Delta x \cdot R_x(x_0, y_0, \Delta x) \end{aligned} \quad (4.10)$$

wobei

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} R_x(x_0, y_0, \Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \cdot y_0 = 0 \quad (4.11)$$

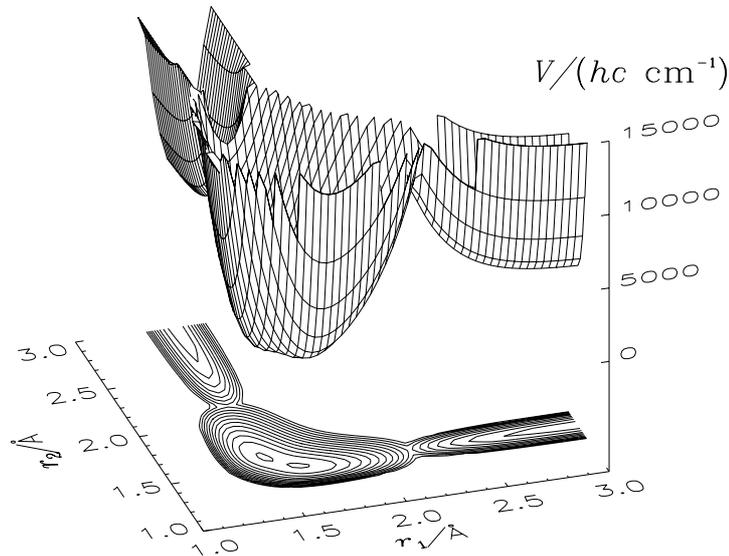


Abbildung 4.5: Die Potentialfunktion für SO_2 im Elektronenzustand \tilde{C}^1B_2 , berechnet von O. Bludský, P. Nachtigall, J. Hrušák und P. Jensen. Die Funktion wird in Abhängigkeit der beiden Bindungsabstände r_1 und r_2 dargestellt ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$). Der Bindungswinkel wird auf 103.3° festgehalten. Höhenlinien sind bei 0, 1000, 2000, ..., 13 000 cm^{-1} gezeichnet.

ist. Wir schreiben die Tangenterlegung in Gln. (4.10) als

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) = x_0^2 \cdot y_0 + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x,y)=(x_0,y_0)} \cdot \Delta x + \Delta x \cdot R_x(x_0, y_0, \Delta x) \quad (4.12)$$

wobei die Größe

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x,y)=(x_0,y_0)} = 2 \cdot x_0 \cdot y_0 \quad (4.13)$$

die *partielle Ableitung* von f nach x , berechnet im Punkt (x_0, y_0) , ist.

Analog zu Gln. (4.12) können wir natürlich auch die Tangenterlegung nach y ,

$$f(x_0, y_0 + \Delta y) = x_0^2 \cdot y_0 + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x,y)=(x_0,y_0)} \cdot \Delta y + \Delta y \cdot R_y(x_0, y_0, \Delta y), \quad (4.14)$$

durchführen. Hier ist dann

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x,y)=(x_0,y_0)} = x_0^2 \quad (4.15)$$

die partielle Ableitung von f nach y , berechnet im Punkt (x_0, y_0) .

Bei der Herleitung einer partiellen Ableitung werden alle Variablen, nach denen *nicht* abgeleitet wird, als Konstanten aufgefaßt. So ist für die Funktion in Gln. (4.9)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \cdot x \cdot y \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2. \quad (4.16)$$

Wie bei Funktionen einer Veränderlichen kann auch $\partial f/\partial x$ und $\partial f/\partial y$ als Funktionen aufgefaßt werden, deren Definitionsbereich alle Punkte umfaßen, in denen eine Zerlegung nach Gln. (4.12) und (4.14) möglich ist. In diesen Punkten ist die Funktion f *partiell differenzierbar*.

Beispiel:

Für den Druck p , die absolute Temperatur T und das molare Volumen V eines idealen Gases gilt

$$p(T, V) = \frac{RT}{V}, \quad (4.17)$$

und damit

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{R}{V} \quad \text{und} \quad \frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{RT}{V^2}. \quad (4.18)$$

Es gibt auch partielle Ableitungen höherer Ordnung mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Der Satz von Schwarz: Sind die partiellen Ableitungen n -ter Ordnung einer Funktion $f(x, y)$ stetig in einem Bereich \mathbb{G} , der eine Teilmenge von \mathbb{D} ist, so ist die Reihenfolge der Differentiation beliebig.

Zum Beispiel lauten für die Funktion

$$f(x, y) = x^2 \cdot y^3 \quad (4.20)$$

die partiellen Ableitungen nach x und y

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \cdot x \cdot y^3 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3 \cdot x^2 \cdot y^2 \quad (4.21)$$

und damit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6 \cdot x \cdot y^2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6 \cdot x \cdot y^2. \quad (4.22)$$

Also haben wir, in Übereinstimmung mit dem Satz von Schwarz,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}. \quad (4.23)$$

4.3 Totales Differential

Eine Funktion $f(x, y)$ heißt an der Stelle (x_0, y_0) *differenzierbar*, falls dort eine Tangenten(ebenen)zerlegung

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= f(x_0, y_0) + \Delta x \cdot \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x,y)=(x_0,y_0)} + \Delta y \cdot \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x,y)=(x_0,y_0)} \\ &+ \Delta x \cdot R_x(x_0, \Delta x, y_0, \Delta y) \\ &+ \Delta y \cdot R_y(x_0, \Delta x, y_0, \Delta y) \end{aligned} \quad (4.24)$$

mit

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} R_x(x_0, \Delta x, y_0, \Delta y) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} R_y(x_0, \Delta x, y_0, \Delta y) = 0 \quad (4.25)$$

möglich ist. Dies ist dann der Fall, wenn alle partiellen Ableitungen an der Stelle (x_0, y_0) stetig sind.

Beispiel

Die Funktion

$$f(x, y) = x^2 \cdot y \quad (4.26)$$

hat die Tangenten(ebenen)zerlegung

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= (x_0 + \Delta x)^2 \cdot (y_0 + \Delta y) \\ &= x_0^2 \cdot y_0 + 2 \cdot x_0 \cdot y_0 \cdot \Delta x + x_0^2 \cdot \Delta y \\ &+ \Delta x \cdot (\Delta x \cdot y_0 + \Delta x \cdot \Delta y) \\ &+ \Delta y \cdot (2 \cdot x_0 \cdot \Delta x). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Setzen wir

$$R_x(x_0, \Delta x, y_0, \Delta y) = \Delta x \cdot y_0 + \Delta x \cdot \Delta y \quad (4.28)$$

und

$$R_y(x_0, \Delta x, y_0, \Delta y) = 2 \cdot x_0 \cdot \Delta x, \quad (4.29)$$

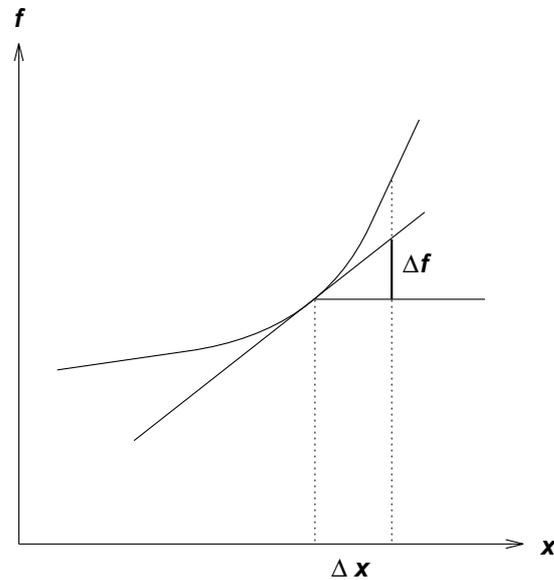


Abbildung 4.6: Für eine Funktion einer reellen Variablen ist $\Delta f = \frac{df}{dx} \Delta x$ eine Näherung für $f(x + \Delta x) - f(x)$.

so hat die Gln. (4.27) die Form von Gln. (4.24), und offensichtlich ist Gln. (4.25) erfüllt. Folglich ist die Funktion in Gln. (4.26) differenzierbar an der Stelle (x_0, y_0) .

Allgemein nennt man die “Tangenten(ebenen)approximation”

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (4.30)$$

das *vollständige Differential* der Funktion f . Das folgende Differential ist eine Näherung für

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \Delta x \cdot R_x + \Delta y \cdot R_y. \quad (4.31)$$

Abbildung 4.6 zeigt die Interpretation der Größe $\Delta f = \frac{df}{dx} \Delta x$ für eine Funktion einer reellen Variablen; diese Größe ist eine Näherung für $f(x + \Delta x) - f(x)$. Analogerweise zeigt Abbildung 4.7 die Interpretation der Größe $\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$ für eine Funktion zweier reeller Variablen.

Beispiel aus der Thermodynamik

Für ein ideales Gas ist die Entropie

$$S(T, V) = C_V \cdot \ln T + R \cdot \ln V + S_0, \quad (4.32)$$

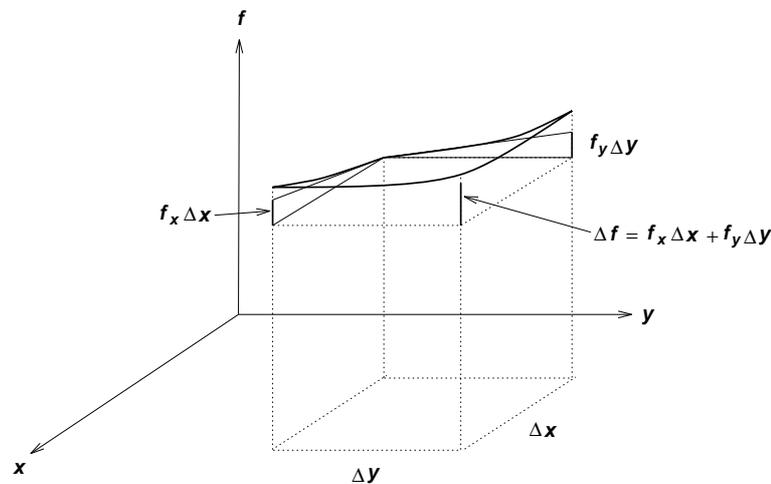


Abbildung 4.7: Für eine Funktion zweier reellen Variablen ist $\Delta f = f_x \Delta x + f_y \Delta y$, wobei $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ und $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ sind, eine Näherung für $f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

wobei C_V die Molwärme bei konstantem Volumen ist. Dann ist das totale Differential der Entropie

$$\begin{aligned} dS &= \frac{\partial S}{\partial T} dT + \frac{\partial S}{\partial V} dV \\ &= \frac{C_V}{T} dT + \frac{R}{V} dV. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Für eine allgemeine Funktion von n reellen Variablen, $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ lautet das totale Differential

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k \end{aligned} \quad (4.34)$$

Totale Differentiale finden zum Beispiel Anwendung in der Fehlerrechnung. Damit werden wir uns später in der Vorlesung beschäftigen.

4.4 Implizite Darstellung einer Funktion einer Veränderlichen

Gegeben sei die Gleichung

$$F(x, y) = 0. \quad (4.35)$$

Diese Gleichung ist die implizite Darstellung einer Funktion $y(x)$. Die Gleichung kann - prinzipiell - nach y aufgelöst werden und liefert damit y in Abhängigkeit von x .

Wir möchten jetzt die Ableitung dy/dx berechnen. In Fällen, bei denen Gln. (4.35) nicht in einfacher Weise nach y aufgelöst werden kann, können wir dy/dx über das totale Differential berechnen. Das totale Differential der Funktion F ist

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0. \quad (4.36)$$

Da Gln. (4.35) erfüllt ist, bleibt $F(x, y)$ konstant gleich Null, und deshalb ist $dF = 0$. Eine formale Umstellung der Gln. (4.36) ergibt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \quad (4.37)$$

Vorausgesetzt, $F(x, y) = 0$, beide partiellen Ableitungen $\partial F/\partial x$ und $\partial F/\partial y$ existieren, sind stetig, und es gilt $\partial F/\partial y \neq 0$, dann liefert Gln. (4.37) den korrekten Ausdruck für dy/dx .

Betrachten wir als Beispiel die Gleichung

$$F(x, y) = x^2 y + \sin(xy) = 0. \quad (4.38)$$

Hier ist das totale Differential

$$dF = (2xy + y \cos(xy)) dx + (x^2 + x \cos(xy)) dy = 0 \quad (4.39)$$

und damit

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy + y \cos(xy)}{x^2 + x \cos(xy)} \quad (4.40)$$

für die Werte von (x, y) , bei denen $x^2 + x \cos(xy) \neq 0$ ist.

4.5 Variablentransformation

Es sei $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ eine reellwertige Funktion der reellen Variablen x_1, x_2, \dots, x_n , deren ersten Ableitungen existieren und stetig sind. Weiter seien

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \\ x_2 &= x_2(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \\ &\vdots \\ x_n &= x_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \end{aligned} \quad (4.41)$$

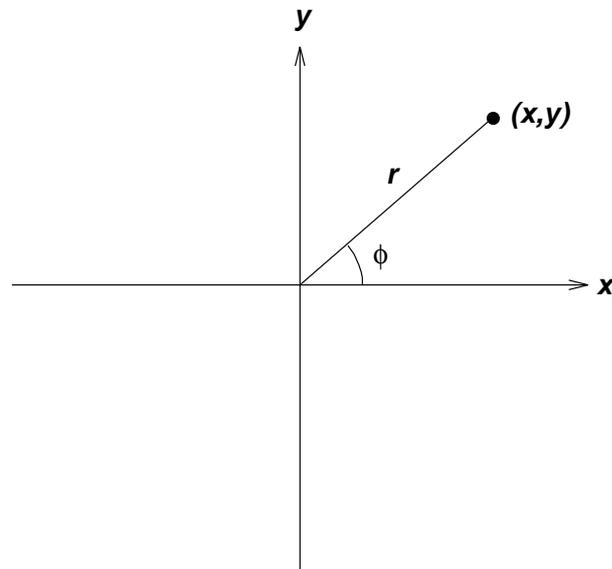


Abbildung 4.8: Ein Punkt in \mathbb{R}^2 wird entweder mittels Kartesischer Koordinaten (x, y) oder mittels Polarkoordinaten (r, ϕ) beschrieben.

differenzierbare Funktionen der reellen Variablen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_2} \\ &\vdots \\ \frac{\partial f}{\partial \alpha_n} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_n} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_n} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Beispiel:

Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2, \quad (4.43)$$

wobei (siehe Abbildung 4.8)

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi, \\ y &= r \sin \phi \end{aligned} \quad (4.44)$$

ist. Nach Gln. (4.42) gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\ &= (2x + 3y) \cos \phi + (3x + 2y) \sin \phi \\ &= (2r \cos \phi + 3r \sin \phi) \cos \phi + (3r \cos \phi + 2r \sin \phi) \sin \phi \\ &= 2r \cos^2 \phi + 6r \sin \phi \cos \phi + 2r \sin^2 \phi \\ &= 2r (1 + 3 \sin \phi \cos \phi).\end{aligned}\tag{4.45}$$

Zum gleichen Ergebnis kommt man in diesem Beispiel, wenn man

$$\begin{aligned}f(x, y) &= r^2 \cos^2 \phi + 3r^2 \sin \phi \cos \phi + r^2 \sin^2 \phi \\ &= r^2 (1 + 3 \sin \phi \cos \phi)\end{aligned}\tag{4.46}$$

nach r differenziert.

5 Integration

5.1 Umkehrung der Differentiation

Wir betrachten eine Funktion

$$f = (\mathbb{D}_f, x \longmapsto f(x), \mathbb{R}) \quad (5.1)$$

sowie eine Funktion

$$F = (\mathbb{D}_F, x \longmapsto F(x), \mathbb{R}). \quad (5.2)$$

F sei im Intervall \mathbb{I} , eine Teilmenge von \mathbb{D}_F , differenzierbar mit der Ableitung F' . Ist $F' = f$ wird F die *Stammfunktion* von f oder das *unbestimmte Integral* von f genannt.

Zum Beispiel ist

$$F = \left(\mathbb{R}, x \longmapsto F(x) = \frac{1}{3} x^3, \mathbb{R} \right) \quad (5.3)$$

eine Stammfunktion von

$$f = (\mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = x^2, \mathbb{R}). \quad (5.4)$$

Addieren wir eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ zu F , erhalten wir eine weitere Stammfunktion zu f , da $(F(x) + C)' = f(x)$ ist.

Wenn F eine Stammfunktion zu f ist, dann besteht die Gesamtheit aller Stammfunktionen aus allen Funktionen der Gestalt $F + C$ mit $C \in \mathbb{R}$.

Man benutzt die Schreibweise

$$F = \int f(x) dx \quad (5.5)$$

oder

$$F = \int dx f(x) \quad (5.6)$$

für Stammfunktionen zu f . Zum Beispiel ist für $f(x) = \sin x$

$$\int \sin x dx = \int dx \sin x = -\cos x + C. \quad (5.7)$$

Oft schreibt man

$$-\cos x + C = \int \sin x dx. \quad (5.8)$$

Für $f(x) = e^{\alpha x}$ ist

$$\int e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + C. \quad (5.9)$$

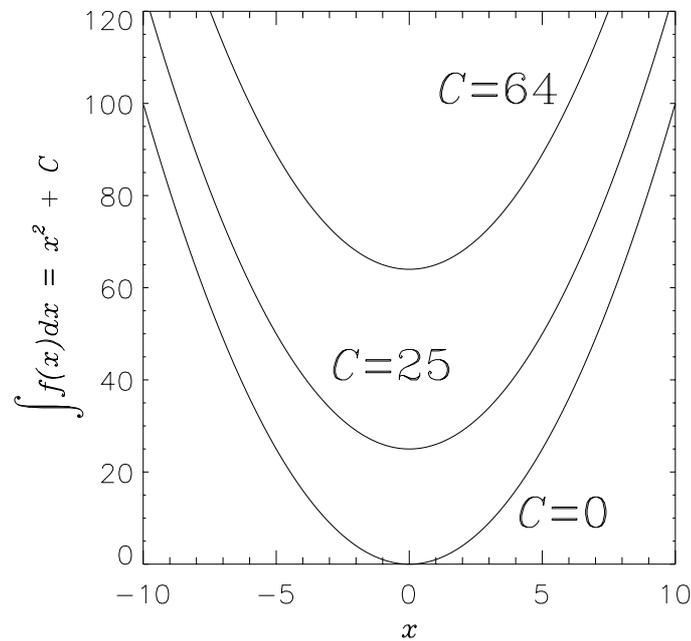


Abbildung 5.1: Beispiele für Stammfunktionen der Funktion $f(x) = 2x$.

Es ist wichtig, sich darüber im Klaren zu sein, daß $\int f(x) dx$ eine *Funktion* (und keine Zahl) ist!

Stammfunktionen bestimmt man

- durch “Kenntnis” von Ableitungen und Umkehrungen (z.B.: $-\cos$ ist die Stammfunktion von \sin , \sin ist die Stammfunktion von \cos), oder
- durch allgemeine Regeln, die wir im Folgenden aufstellen werden.

Integraltypen

Haben wir zum Beispiel

$$f(x) = 2x \quad (5.10)$$

gilt

$$\int f(x) dx = x^2 + C. \quad (5.11)$$

Diese Funktionen bilden einen Kurvenschar (siehe Abbildung 5.1).

Durch jeden Punkt (x_0, y_0) der Ebene geht der Graph genau *einer* Stammfunktion. Diese erhält man graphisch durch Parallelverschiebung (entlang der y -Achse)

des Graphen irgendeiner anderen Stammfunktion. Wir müssen die Größe C in Gln. (5.11) so bestimmen, daß der Graph durch (x_0, y_0) verläuft:

$$x_0^2 + C = y_0 \quad (5.12)$$

und damit

$$C = y_0 - x_0^2. \quad (5.13)$$

Die Stammfunktion, deren Graph durch (x_0, y_0) verläuft, ist also

$$F_{(x_0, y_0)}(x) = x^2 + y_0 - x_0^2. \quad (5.14)$$

Mit $(x_0, y_0) = (1, 2)$ erhalten wir

$$F_{(1,2)}(x) = x^2 + 2 - 1^2 = x^2 + 1. \quad (5.15)$$

Das unbestimmte Integral schreibt man als

$$\int f(t) dt = F(t) + C. \quad (5.16)$$

Die Bezeichnung der *Integrationsvariablen* t ist belanglos, wir können auch x, u, v, \dots benutzen. Wir definieren die Größen

$$\int_a^b f(t) dt = F(t)|_a^b = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a) \quad (5.17)$$

und

$$\int_a^x f(t) dt = F(t)|_a^x = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a) \quad (5.18)$$

als Differenzen der Werte bei der *oberen Grenze* (hier bzw. b oder x) und der *unteren Grenze* (hier in beiden Fällen a) des Integrals.

Soll der Graph der Stammfunktion durch den Punkt $(x_0, 0)$ gehen, dann gilt

$$F_{(x_0,0)}(x) = F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t) dt. \quad (5.19)$$

Das heißt, $\int_{x_0}^x f(t) dt$ ist *die* Stammfunktion, für die gilt $F(x_0) = 0$. Dann ist

$$F_{(x_0, y_0)}(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt + y_0 \quad (5.20)$$

die Stammfunktion, für die gilt $F(x_0) = y_0$. Die Größe

$$F_{(x_0,0)}(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

nennt man das *bestimmte Integral*. Die Größe

$$\int_{x_0}^a f(t) dt$$

ist der Wert des bestimmten Integrals an der Stelle a .

Wir fassen zusammen:

Das unbestimmte Integral	Das bestimmte Integral	Der Wert des bestimmten Integrals
$\int f(x) dx = F(x) + C$	$\int_{x_0}^x f(t) dt = F_{(x_0,0)}(x)$	$\int_{x_0}^a f(t) dt = F_{(x_0,0)}(a)$
ist eine Funktion von x .	ist die Funktion von x , deren Graph durch $(x_0, 0)$ geht.	ist eine Zahl und gleicht dem Funktionswert von $\int_{x_0}^x f(t) dt$ an der Stelle a .

Betrachten wir zum Beispiel die Funktion

$$f(x) = e^{-3x} \text{ bzw. } f(t) = e^{-3t}, \quad (5.21)$$

ist das unbestimmte Integral

$$\int f(x) dx = -\frac{1}{3} e^{-3x} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (5.22)$$

Das heißt, alle Stammfunktionen der Funktion f sind in Gln. (5.22) gegeben. Das bestimmte Integral

$$\int_0^x f(t) dt = -\frac{1}{3} e^{-3x} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} (e^{-3x} - 1) \quad (5.23)$$

ist die Stammfunktion, deren Graph durch $(0, 0)$ geht, und

$$\int_0^2 f(t) dt = -\frac{1}{3} (e^{-3 \cdot 2} - 1) = -\frac{1}{3} (e^{-6} - 1) \quad (5.24)$$

ist der Wert *dieser* Stammfunktion an der Stelle $x = 2$.

5.2 Grundlegende Integrationsregeln

Zwei Funktionen f und g besitzen die Stammfunktionen F bzw. G für dasselbe x_0 :

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt \quad \text{und} \quad G(x) = \int_{x_0}^x g(t) dt. \quad (5.25)$$

Wir möchten jetzt die Stammfunktion der Linearkombination

$$h = \alpha f + \beta g, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (5.26)$$

ermitteln. Versuchen wir, die Funktion

$$H = \alpha F + \beta G \quad (5.27)$$

abzuleiten. Offensichtlich haben wir

$$H' = (\alpha F + \beta G)' = \alpha F' + \beta G' = \alpha f + \beta g = h. \quad (5.28)$$

Die Funktion H ist also eine Stammfunktion von h oder, anders ausgedrückt,

$$\int_{x_0}^x [\alpha f(t) + \beta g(t)] dt = \alpha \cdot \int_{x_0}^x f(t) dt + \beta \cdot \int_{x_0}^x g(t) dt. \quad (5.29)$$

Folglich sind alle Stammfunktionen der Funktion

$$h(x) = 3x^2 + 4x - 3 \quad (5.30)$$

als

$$H(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + C, \quad C \in \mathbb{R} \quad (5.31)$$

gegeben. Die Stammfunktion, deren Graph durch $(2, 0)$ geht, ist

$$H_{(2,0)}(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 10 \quad (5.32)$$

und die Stammfunktion, deren Graph durch $(2, 4)$ geht, ist

$$H_{(2,4)}(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 6. \quad (5.33)$$

Berechnung bestimmter Integrale

Zur Berechnung bestimmter Integrale (und der Werte bestimmter Integrale) existieren die folgenden Rechenregeln:

a)

$$\int_a^b f(t) dt = F(t)|_a^b = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a) = \int_a^b f(u) du, \quad (5.34)$$

Das heißt, der Name der Integrationsvariablen ist belanglos.

b)

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = - \int_b^a f(t) dt. \quad (5.35)$$

c)

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt. \quad (5.36)$$

Gleichung (5.36) folgt von der Tatsache, daß

$$F(b) - F(a) = (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)) \quad (5.37)$$

ist.

d)

$$\int_a^a f(t) dt = F(a) - F(a) = 0. \quad (5.38)$$

e) Betrachten wir schließlich drei Funktionen f , g_- und g_+ , die alle im Intervall $[a, x]$ *integrabel* sind (das heißt, sie besitzen im Intervall $[a, x]$ alle Stammfunktionen). Gilt für alle $t \in [a, x]$

$$g_-(t) \leq f(t) \leq g_+(t) \quad (5.39)$$

dann ist

$$\int_a^x g_-(t) dt \leq \int_a^x f(t) dt \leq \int_a^x g_+(t) dt. \quad (5.40)$$

Ungleichungen zwischen Funktionen dürfen also integriert werden.

5.3 Mittelwerte und Flächen

Gegeben sie die Funktion

$$f = (\mathbb{A}, x \longmapsto f(x), \mathbb{R}). \quad (5.41)$$

Der *Mittelwert* wird mit \bar{f} bezeichnet; $\bar{f} \in \mathbb{R}$.

Um \bar{f} zu definieren, betrachten wir zunächst den Fall, bei dem der Definitionsbereich \mathbb{A} eine endliche Menge von N Elementen ist:

$$\mathbb{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}. \quad (5.42)$$

In diesem Falle ist

$$\bar{f} = \frac{1}{N} (f(a_1) + f(a_2) + f(a_3) + \dots + f(a_N)) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(a_k). \quad (5.43)$$

Die folgende Tabelle stellt ein Beispiel dar:

k	1	2	3	4
a_k	1.0	2.0	3.0	4.0
$f(a_k)$	1.5	2.0	6.5	8.0
$f(a_k) - \bar{f}$	-3.0	-2.5	+2.0	+3.5

Die ersten drei Zeilen der Tabelle ergeben

$$\bar{f} = \frac{1}{4} (1.5 + 2.0 + 6.5 + 8.0) = \frac{18.0}{4} = 4.5. \quad (5.44)$$

Aus der letzten Zeile berechnen wir

$$\sum_{k=1}^4 (f(a_k) - \bar{f}) = \sum_{k=1}^4 (f(a_k) - 4.5) = (-3.0) + (-2.5) + 2.0 + 3.5 = 0. \quad (5.45)$$

Der Mittelwert ist also so gewählt, daß Abweichungen der Daten nach “oben” und nach “unten” sich ausgleichen.

Wie definieren wir den Mittelwert \bar{f} , wenn der Definitionsbereich \mathbb{A} ein kontinuierliches Intervall reeller Zahlen ist? Das heißt

$$\mathbb{A} = [a, b]. \quad (5.46)$$

Abbildung 5.2 zeigt den Graphen einer Funktion f im Intervall $[a, b]$. Der Mittelwert \bar{f} gibt eine Parallele zur x -Achse, die den Funktionsgraphen im Bereich $[a, b]$ in einer gegebenen Weise “am besten” approximiert. Anschaulich heißt dies, daß die gesamte Inhalte der Flächen zwischen Parallele und Graph “oberhalb” der Parallele und “unterhalb” der Parallele gleich sein müssen. Die entsprechenden Flächen sind in Abbildung 5.2 schattiert.

Um für eine gegebene Funktion $f(x)$ in einem Intervall $[a, b]$ berechnen zu können, müssen wir den Flächeninhalt unter einer Kurve berechnen können. Wie machen wir das? Abbildung 5.3 erklärt das Prinzip. Den Flächeninhalt zwischen Kurve und x -Achse von a bis x_0 bezeichnen wir als $F(x_0)$; den entsprechenden Flächeninhalt von a bis $x_0 + \Delta x$ ist dann $F(x_0 + \Delta x)$. Es gilt (Abbildung 5.3)

$$\begin{aligned} F(x_0 + \Delta x) &= F(x_0) + F_R + F_D \\ &= F(x_0) + f(x_0) \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \frac{F_D}{\Delta x} \end{aligned} \quad (5.47)$$

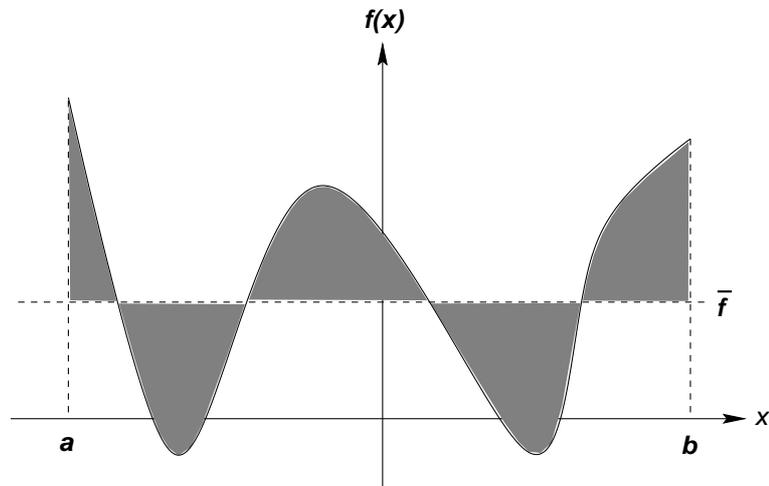


Abbildung 5.2: Der Mittelwert einer kontinuierlichen Funktion.

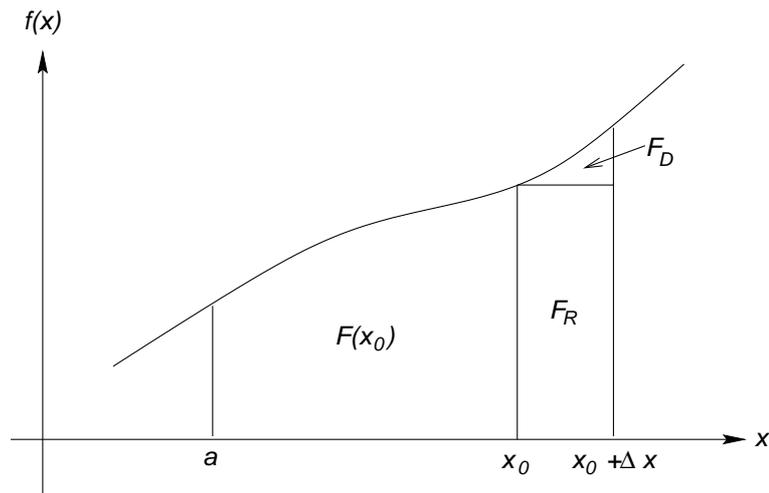
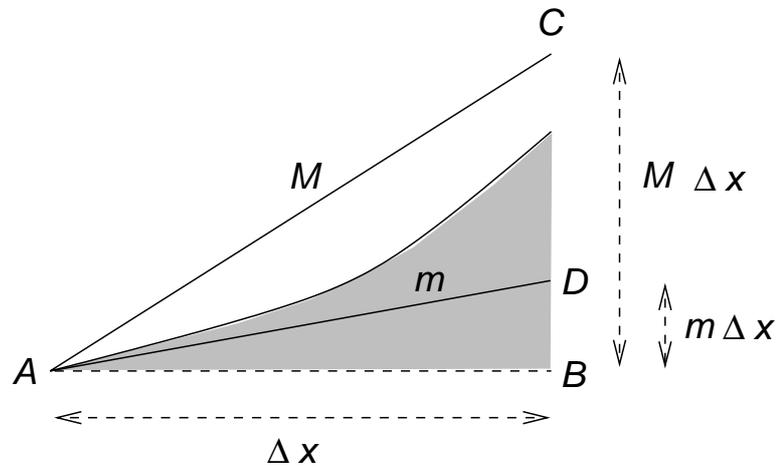


Abbildung 5.3: Der Flächeninhalt unter einem Graphen.

da offensichtlich $F_R = f(x_0) \cdot \Delta x$ ist.

Abbildung 5.4 zeigt einen kleinen Ausschnitt von Abbildung 5.3. Der Flächeninhalt F_D in Gln. (5.47) ist in Abbildung 5.4 schattiert. Die beiden Steigungen M und m sind so gewählt, daß

$$m \leq f'(x) \leq M \quad (5.48)$$

Abbildung 5.4: Die Berechnung des schattierten Flächenbeitrages F_D .

für alle $x \in [x_0, x_0 + \Delta x]$. Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC in Abbildung 5.4 ist

$$F_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \Delta x \cdot M \cdot \Delta x \quad (5.49)$$

und der Flächeninhalt des Dreiecks ABD ist

$$F_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot \Delta x \cdot m \cdot \Delta x. \quad (5.50)$$

Offensichtlich gilt

$$F_{ABD} \leq F_D \leq F_{ABC}, \quad (5.51)$$

das heißt

$$\frac{1}{2} \cdot \Delta x \cdot m \cdot \Delta x \leq F_D \leq \frac{1}{2} \cdot \Delta x \cdot M \cdot \Delta x \quad (5.52)$$

oder

$$\frac{1}{2} \cdot \Delta x \cdot m \leq \frac{F_D}{\Delta x} \leq \frac{1}{2} \cdot \Delta x \cdot M. \quad (5.53)$$

Lassen wir nun Δx gegen null gehen, gilt

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \Delta x \cdot m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \Delta x \cdot M = 0. \quad (5.54)$$

Da aber die Ungleichung (5.53) für jeden Wert von Δx erfüllt ist, folgt

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F_D}{\Delta x} = 0. \quad (5.55)$$

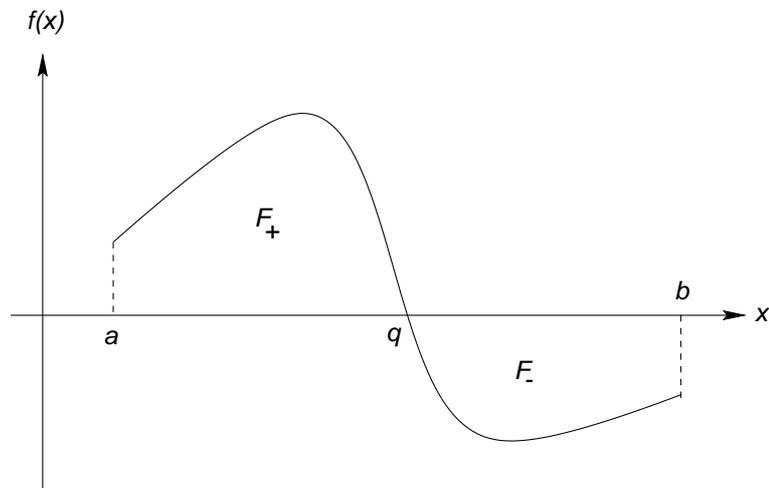


Abbildung 5.5: Der signierte Flächeninhalt.

Damit ist Gln. (5.47) eine Tangentzerlegung und

$$f(x_0) = F'(x_0) \quad (5.56)$$

bzw.

$$F(x_0) = \int_a^{x_0} f(t) dt, \quad (5.57)$$

da $F(a) = 0$ ist.

Ist $f(t) \geq 0$ für alle $t \in [a, b]$, ist die Fläche zwischen dem Graph von $f(x)$ und der x -Achse im Intervall $[a, b]$ als

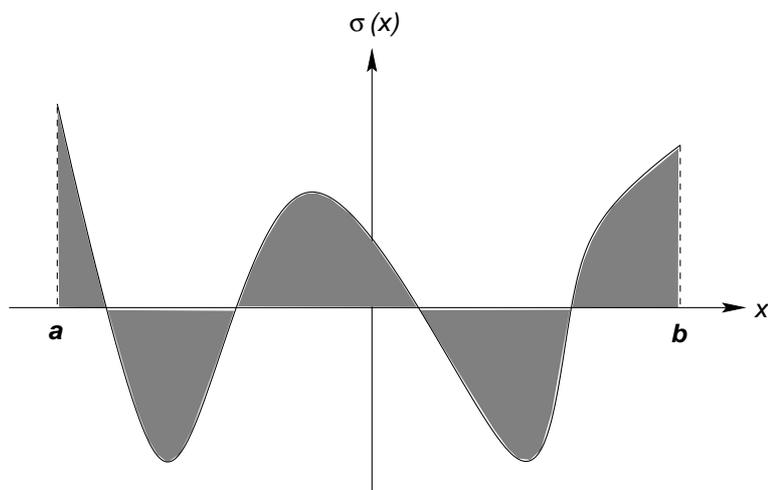
$$F = \int_a^b f(t) dt \quad (5.58)$$

gegeben. Verläuft der Graph unterhalb der x -Achse, erhält man einen negativen Wert (das heißt, einen *signierten Flächeninhalt*). Die Funktion in Abbildung 5.5 hat eine Nullstelle $q \in [a, b]$. Der Beitrag

$$F_+ = \int_a^q f(t) dt \quad (5.59)$$

ist positiv, wogegen

$$F_- = \int_q^b f(t) dt \quad (5.60)$$

Abbildung 5.6: Der Graph der Funktion $\sigma(x)$ (vgl. Abbildung 5.2).

negativ ist. Hier gibt $\int_a^b f(t) dt$ die Differenz der beiden Flächen

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^q f(t) dt + \int_q^b f(t) dt = F_+ + F_- = |F_+| - |F_-|. \quad (5.61)$$

Kehren wir jetzt zur Diskussion des Mittelwertes in Abbildung 5.2 zurück. Wir möchten den Mittelwert \bar{f} der Funktion f im Intervall $[a, b]$ so definieren, daß in Abbildung 5.2 die gesamte Inhalte der Flächen zwischen Mittelwerts-Parallele und Graph “oberhalb” der Parallele bzw. “unterhalb” der Parallele gleich seien. Diese Bedingung kann auch mittels der Funktion

$$\sigma(x) = f(x) - \bar{f} \quad (5.62)$$

ausgedrückt werden. Den Graphen der Funktion $\sigma(x)$ erhalten wir dadurch, daß wir den Graphen von $f(x)$ so entlang der y -Achse verschieben, daß die Mittelwerts-Parallele mit der x -Achse zusammenfällt (siehe Abbildung 5.6). Folglich möchten wir den Mittelwert \bar{f} so definieren, daß die gesamten Inhalte der Flächen zwischen dem Graph von $\sigma(x)$ und der x -Achse oberhalb der x -Achse bzw. unterhalb der x -Achse gleich sind. Wenn dieses zutrifft, ist (Abbildung 5.5)

$$\int_a^b \sigma(x) dx = \int_a^b (f(x) - \bar{f}) dx = 0. \quad (5.63)$$

Anwendung der Gln. (5.29) ergibt

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b \bar{f} dx = 0. \quad (5.64)$$

Da \bar{f} eine Konstante ist, gilt

$$\int_a^b \bar{f} dx = [\bar{f} \cdot x]_a^b = \bar{f} \cdot (b - a), \quad (5.65)$$

und kombinieren wir schließlich Gln. (5.64) und (5.65), erhalten wir

$$\bar{f} \cdot (b - a) = \int_a^b f(x) dx, \quad (5.66)$$

das heißt

$$\bar{f} = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a}. \quad (5.67)$$

Dabei ist über die Nullstellen von f in $[a, b]$ hinwegzuintegrieren.

Beispiele

Die Funktion

$$f(x) = \sin x \quad (5.68)$$

hat die Stammfunktionen

$$F(x) = -\cos x + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (5.69)$$

Daher ist

$$\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2. \quad (5.70)$$

Der Mittelwert von $\sin x$ im Intervall $[0, \pi]$ ist folglich

$$\bar{f} = \frac{\int_0^\pi \sin x dx}{\pi - 0} = \frac{2}{\pi} \approx 0.64. \quad (5.71)$$

Hingegen ist

$$\int_{-\pi}^\pi \sin x dx = [-\cos x]_{-\pi}^\pi = -\cos \pi - (-\cos(-\pi)) = -(-1) - (+1) = 0. \quad (5.72)$$

Damit ist der Mittelwert von $\sin x$ im Intervall $[-\pi, \pi]$

$$\bar{f} = \frac{\int_{-\pi}^\pi \sin x dx}{\pi - (-\pi)} = 0. \quad (5.73)$$

Allgemein gilt für *ungerade* Funktionen $f(x)$, daß für alle Werte von a

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0 \quad (5.74)$$

ist.

Für *gerade* Funktionen $f(x)$ haben wir

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \cdot \int_0^a f(x) dx \quad (5.75)$$

für alle Werte von a . Dieses Integral ist nicht notwendigerweise Null. Für bestimmte Funktionen und bestimmte Werte von a kann es aber null werden. Zum Beispiel gilt

$$\int_0^{\sqrt{3}} (x^2 - 1) dx = \left[\frac{1}{3} x^3 - x \right]_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0. \quad (5.76)$$

5.4 Integrationsverfahren

Allgemeines

- Es gibt viele elementar konstruierbare Funktionen $f(x)$, die *keine* analytisch direkt darstellbare Stammfunktion besitzen. Ein Beispiel ist die Funktion $f(x) = \exp(-x^2)$.
- Im Gegensatz zur Differentiation, die für jede elementar konstruierbare Funktion nach strikten Regeln durchgeführt werden kann, gibt es keine Patentrezepte für Integration. Hier hilft nur Übung und eine genaue Betrachtung des Integranden.
- Für einige elementar konstruierbare Funktionen kennen wir die Stammfunktionen:

$f(x)$	$\int f(x) dx$
x^n	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad n \neq -1$
x^{-1}	$\ln x + C \quad x \neq 0$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
e^x	$e^x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C \quad x \in]-1, 1[$

$C \in \mathbb{R}$

d) Elementare Regeln, siehe zum Beispiel Gln. (5.29) und Gln. (5.34)-(5.38).

Die Beziehung

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C \quad (5.77)$$

in der obigen Tabelle erfordert vielleicht einen Kommentar. Für $x > 0$ gilt

$$\ln' x = \frac{1}{x} \quad (5.78)$$

und damit ist

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x + C. \quad (5.79)$$

Für $x > 0$ ist aber $|x| = x$, und Gln. (5.77) ist erfüllt. Für $x < 0$ ist $|x| = -x$, und wir haben

$$\ln' |x| = \ln'(-x) = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}, \quad (5.80)$$

so daß Gln. (5.77) wieder erfüllt ist. Diese Gleichung gilt also für alle $x \neq 0$.

Integration durch Substitution

Betrachten wir einige Beispiele:

a) Wir möchten das unbestimmte Integral

$$\int e^{5x-3} dx \quad (5.81)$$

ermitteln und setzen dabei

$$u = 5x - 3. \quad (5.82)$$

Dann gilt

$$u' = \frac{du}{dx} = 5. \quad (5.83)$$

Formales Rechnen mit dem Bruch du/dx ergibt nun

$$dx = \frac{1}{5} du. \quad (5.84)$$

Die Gleichungen (5.82) und (5.84) werden nun in Gln. (5.81) eingesetzt, und wir erhalten

$$\int e^{5x-3} dx = \int e^u \frac{1}{5} du = \frac{1}{5} \int e^u du = \frac{1}{5} e^u + C = \frac{1}{5} e^{5x-3} + C. \quad (5.85)$$

b) Bei der Herleitung von

$$\int \sin x \cdot \cos x dx \quad (5.86)$$

setzen wir

$$u = \sin x \text{ und damit } \frac{du}{dx} = \cos x. \quad (5.87)$$

Das heißt

$$dx = \frac{1}{\cos x} du. \quad (5.88)$$

und

$$\int \sin x \cdot \cos x dx = \int u \cdot \cos x \frac{1}{\cos x} du = \int u du = \frac{1}{2} u^2 = \frac{1}{2} \sin^2 x + C. \quad (5.89)$$

c) Mit

$$u = -x^2 \text{ und damit } \frac{du}{dx} = -2x \quad (5.90)$$

gilt

$$\int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int e^u du = -\frac{1}{2} e^u + C = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C. \quad (5.91)$$

d) Im unbestimmten Integral

$$\int \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 1} dx \quad (5.92)$$

substituieren wir

$$u = x^2 - 3x + 1 \text{ und damit } \frac{du}{dx} = 2x - 3. \quad (5.93)$$

Also ist

$$du = (2x - 3) dx \quad (5.94)$$

und wir haben

$$\int \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 1} dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C = \ln |x^2 - 3x + 1| + C. \quad (5.95)$$

Wir fassen zusammen: Integration durch Substitution funktioniert in den folgenden Fällen:

Integraltyp	Substitution	Integral
$\int f(\alpha x + \beta) dx$	$u = \alpha x + \beta$	$\frac{1}{\alpha} \int f(u) du$ “ $\frac{1}{\alpha}$ -Regel”
$\int f(x) f'(x) dx$	$u = f(x)$	$\int u du = \frac{1}{2} u^2 + C$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$	$u = f(x)$	$\int \frac{du}{u} = \ln u + C$

Partielle Integration (oder Produktintegration)

Die Ableitung eines Produktes ergibt

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \quad (5.96)$$

und damit

$$u'(x) \cdot v(x) = (u(x) \cdot v(x))' - u(x) \cdot v'(x). \quad (5.97)$$

Durch Integration erhalten wir

$$\int u'(x) \cdot v(x) dx = \int (u(x) \cdot v(x))' dx - \int u(x) \cdot v'(x) dx \quad (5.98)$$

oder

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx. \quad (5.99)$$

Damit wir ein Integral $\int f(x) dx$ durch partielle Integration ermitteln können, müssen die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

- $f(x)$ muß als $u'(x) \cdot v(x)$ darstellbar sein.
- $u(x)$ muß bekannt sein.
- man muss $f(x)$ “passend” als Produkt wählen.
- “passend” heißt: man kommt in der einfachst möglichen Weise ans Ziel.

Beispiele für partielle Integration

a) Im unbestimmten Integral

$$\int x \cdot \ln x \, dx \quad (5.100)$$

setzen wir

$$u'(x) = x \quad \text{und} \quad v(x) = \ln x. \quad (5.101)$$

Dann gelten

$$u(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad \text{und} \quad v'(x) = \frac{1}{x}. \quad (5.102)$$

Partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned} \int x \cdot \ln x \, dx &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C. \end{aligned} \quad (5.103)$$

In diesen Beispiel hätte man auch $u(x) = \frac{1}{2}x^2 + C_u$ wählen können. In diesem Fall erhalten wir

$$\begin{aligned} \int x \cdot \ln x \, dx &= \left(\frac{1}{2}x^2 + C_u\right) \ln x - \int \left(\frac{1}{2}x^2 + C_u\right) \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx + C_u \left(\ln x - \int \frac{dx}{x}\right) \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C_1 + C_u (\ln x - \ln x - C_2) \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + (C_1 - C_u C_2). \end{aligned} \quad (5.104)$$

Diese Lösungen sind aber mit denen in Gln. (5.103) identisch, indem wir ja die willkürliche Konstante C in Gln. (5.103) als $C = C_3 - C_u C_2$ schreiben können. Dieses Ergebnis hat allgemeine Gültigkeit: Bei der Funktion $u(x)$ setzt man normalerweise die Integrationskonstante $C_u = 0$.

b) Die partielle Integration muß manchmal wiederholt werden. Im Integral

$$\int e^x \cdot \sin x \, dx \quad (5.105)$$

setzen wir zunächst

$$u_1'(x) = e^x \quad \text{und} \quad v_1(x) = \sin x. \quad (5.106)$$

Dann gelten

$$u_1(x) = e^x \quad \text{und} \quad v_1'(x) = \cos x. \quad (5.107)$$

Partielle Integration ergibt

$$\int e^x \cdot \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx. \quad (5.108)$$

Im Integral

$$\int e^x \cdot \cos x \, dx \quad (5.109)$$

setzen wir

$$u_2'(x) = e^x \quad \text{und} \quad v_2(x) = \cos x. \quad (5.110)$$

Dann haben wir

$$u_2(x) = e^x \quad \text{und} \quad v_2'(x) = -\sin x. \quad (5.111)$$

Also ist

$$\int e^x \cdot \cos x \, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx. \quad (5.112)$$

Setzen wir dieses Ergebnis in Gln. (5.108) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} \int e^x \cdot \sin x \, dx &= e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx \right) \\ &= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx. \end{aligned} \quad (5.113)$$

Folglich gilt

$$2 \int e^x \cdot \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x + 2C \quad (5.114)$$

und damit

$$\int e^x \cdot \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C. \quad (5.115)$$

c) Im unbestimmten Integral

$$\int \ln x \, dx \quad (5.116)$$

setzen wir

$$u'(x) = 1 \quad \text{und} \quad v(x) = \ln x. \quad (5.117)$$

Dann gelten

$$u(x) = x \quad \text{und} \quad v'(x) = \frac{1}{x}. \quad (5.118)$$

Partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned} \int \ln x \, dx &= x \ln x - \int x \frac{1}{x} \, dx \\ &= x \ln x - \int dx \\ &= x \ln x - x + C. \end{aligned} \quad (5.119)$$

Integration gebrochen rationaler Funktionen

Die *gebroschen rationale Funktion*

$$R(x) = \frac{f_m(x)}{g_n(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0}, \quad m \geq n, \quad (5.120)$$

kann *unecht gebroschen* sein. In diesem Fall läßt sich die Funktion als

$$R(x) = p_{m-n}(x) + \frac{r_k(x)}{g_n(x)} \quad (5.121)$$

schreiben, wobei $p_{m-n}(x)$ ein Polynom $(m-n)$ -ten Grades ist, und $r_k(x)$ ein Polynom k -ten Grades mit $k < n$ ist.

Ein Beispiel für eine unecht gebroschen rationale Funktion ist

$$R(x) = \frac{x^4 + x^3 - 16x^2 + 25x + 11}{x^2 + 3x - 10}. \quad (5.122)$$

Diese Funktion läßt sich schreiben als

$$R(x) = ax^2 + bx + c + \frac{dx + h}{x^2 + 3x - 10}. \quad (5.123)$$

Multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung mit $x^2 + 3x - 10$ erhalten wir

$$\begin{aligned} x^4 + x^3 - 16x^2 + 25x + 11 \\ = (x^2 + 3x - 10)(ax^2 + bx + c) + dx + h. \end{aligned} \quad (5.124)$$

Durch Ausmultiplizieren der rechten Seite dieser Gleichung und Koeffizientenvergleich erhalten wir nun die Gleichungen

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b + 3a &= 1 \\ c + 3b - 10a &= 16 \\ 3c - 10b + d &= 25 \\ -10c + h &= 11 \end{aligned} \quad (5.125)$$

mit der Lösung

$$(a, b, c, d, h) = (1, -2, 0, 5, 11) \quad (5.126)$$

so daß

$$R(x) = x^2 - 2x + \frac{5x + 11}{x^2 + 3x - 10} \quad (5.127)$$

ist.

Die “verbleibende” gebrochene Funktion $r_k(x)/g_n(x)$ in Gln. (5.121) hat $k < n$ und ist damit *echt gebrochen*, das heißt, sie läßt sich nicht weiter nach Gln. (5.121) zerlegen. Eine echt gebrochen rationale Funktion kann jedoch als eine Summe von endlich vielen *Partialbrüchen* zerlegt werden:

$$\frac{r_k(x)}{g_n(x)} = \sum_t \frac{A_t}{(x - \xi_t)^{n_t}} + \sum_u \frac{B_u x + C_u}{(x^2 + 2\alpha_u x + \beta_u)^{n_u}}, \quad (5.128)$$

und die Summe ist dann zu integrieren. In Gln. (5.128) sind die ξ_i die reellen Nullstellen des Nennerpolynoms $g_n(x)$. Falls $g_n(x)$ komplexe Nullstellen besitzt, treten die Polynome $x^2 + 2\alpha_u x + \beta_u$ auf. Sie haben dieselben komplexen Nullstellen wie $g_n(x)$.

Um die *Partialbruchzerlegung* der echt gebrochen rationalen Funktion

$$\frac{r_1(x)}{g_2(x)} = \frac{5x + 11}{x^2 + 3x - 10} \quad (5.129)$$

durchzuführen, bestimmen wir zunächst die Nullstellen des Polynoms $x^2 + 3x - 10$. Sie sind $x_1 = -5$ und $x_2 = 2$ und sind damit beide reell. Dann gilt

$$\frac{5x + 11}{x^2 + 3x - 10} = \frac{A_1}{x + 5} + \frac{A_2}{x - 2}, \quad (5.130)$$

wobei die Koeffizienten A_1 und A_2 zu bestimmen sind. Wir haben

$$\frac{A_1}{x + 5} + \frac{A_2}{x - 2} = \frac{A_1(x - 2) + A_2(x + 5)}{(x + 5)(x - 2)} = \frac{(A_1 + A_2)x - 2A_1 + 5A_2}{x^2 + 3x - 10}. \quad (5.131)$$

Gleichung (5.130) ist erfüllt für

$$A_1 + A_2 = 5 \quad \text{und} \quad -2A_1 + 5A_2 = 11; \quad (5.132)$$

diese Gleichungen haben die Lösung

$$(A_1, A_2) = (2, 3). \quad (5.133)$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \int \frac{5x + 11}{x^2 + 3x - 10} dx &= \int \left(\frac{2}{x + 5} + \frac{3}{x - 2} \right) dx \\ &= 2 \ln |x + 5| + 3 \ln |x - 2| + C \\ &= \ln (|x + 5|^2 |x - 2|^3) + C. \end{aligned} \quad (5.134)$$

Für das Nennerpolynom in Gln. (5.130), $p(x) = x^2 + 3x - 10$, gilt

$$x^2 + 3x - 10 = (x + 5)(x - 2). \quad (5.135)$$

Offensichtlich hat das Polynom die beiden Nullstellen $x_1 = -5$ und $x_2 = 2$, wobei $x_1 \neq x_2$ ist. Ein Polynom kann auch *mehrfache reelle Nullstellen* haben. Zum Beispiel ist

$$x^3 - 3x + 2 = (x + 2)(x - 1)^2. \quad (5.136)$$

Dieses Polynom hat die Nullstellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$, aber $x_2 = 1$ ist eine *zweifache Nullstelle*, weil der Faktor $(x - 1)$ zweimal auf der rechten Seite der Gln. (5.136) vorkommt. Betrachten wir ein allgemeines Polynom n -ter Ordnung

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0. \quad (5.137)$$

Besitzt dieses Polynom nur reelle (und keine komplexe) Nullstellen, können wir es als

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = a_n (x - \xi_1)^{\ell_1} (x - \xi_2)^{\ell_2} (x - \xi_3)^{\ell_3} \dots \quad (5.138)$$

ausdrücken. Hier sind $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ die Nullstellen des Polynoms, und jede Nullstelle hat eine *Vielfachheit* ℓ_i . Für die Summe der Vielfachheiten gilt $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \dots = n$. Für das Polynom in Gln. (5.4) haben beide Nullstellen ($x_1 = -5$ und $x_2 = 2$) die Vielfachheit 1, aber für das Polynom Gln. (5.136) hat die Nullstelle $x_1 = -2$ die Vielfachheit 1, während die Nullstelle $x_2 = 1$ die Vielfachheit 2 hat.

Bei der Partialbruchzerlegung einer echt gebrochen rationalen Funktion, deren Nennerpolynom mehrfache reelle Nullstellen hat, liefert jede solche Nullstelle einen Beitrag

$$\frac{A_{i,1}}{x - \xi_i} + \frac{A_{i,2}}{(x - \xi_i)^2} + \dots + \frac{A_{i,\ell_i}}{(x - \xi_i)^{\ell_i}} \quad (5.139)$$

zur Partialbruchzerlegung. Die Partialbruchzerlegung ist also eine Summe solcher Beiträge; es gibt einen Beitrag für jede Nullstelle. Demzufolge erhalten wir die Partialbruchzerlegung

$$\frac{7x + 5}{x^3 - 3x + 2} = \frac{A_1}{x + 2} + \frac{A_{2,1}}{x - 1} + \frac{A_{2,2}}{(x - 1)^2}. \quad (5.140)$$

Wir können nun die rechte Seite dieser Gleichung auf einem gemeinsamen Nenner bringen und einen Koeffizientenvergleich durchführen. Die dadurch erhaltenen Gleichungen hat die Lösungen

$$(A_1, A_{2,1}, A_{2,2}) = (-1, 1, 4), \quad (5.141)$$

so daß

$$\frac{7x + 5}{x^3 - 3x + 2} = -\frac{1}{x + 2} + \frac{1}{x - 1} + \frac{4}{(x - 1)^2} \quad (5.142)$$

ist.

Es kann passieren, daß einige Nullstellen eines Nennerpolynoms komplex sind. Zum Beispiel hat das Polynom $x^2 + 1$ keine reelle Nullstellen, aber die komplexe Nullstellen $x_1 = -i$ und $x_2 = i$, wobei i eine *imaginäre* Zahl mit $i^2 = -1$ ist. Da wir in der Vorlesung die komplexen Zahlen noch nicht behandelt haben, notieren wir uns an dieser Stelle nur, daß die Partialbruchzerlegung einer echt gebrochen rationalen Funktion, deren Nennerpolynom komplexe Nullstellen hat, Terme in der Form

$$\frac{B_u x + C_u}{(x^2 + 2\alpha_u x + \beta_u)^{n_u}} \quad (5.143)$$

enthalten wird, wobei B_u , C_u , α_u und β_u reell sind.

Die Integration einer partialbruchzerlegten Funktion erfolgt nach den folgenden Richtlinien:

$$\int \frac{A}{x - \xi} dx = A \ln |x - \xi| + C, \quad (5.144)$$

$$\int \frac{A}{(x - \xi)^n} dx = \frac{A}{1 - n} (x - \xi)^{1-n} + C, \quad n \neq 1. \quad (5.145)$$

Die Integration des in Gln. (5.143) gegebenen Beitrags ist komplizierter. Mittels der Substitution $v = x + \alpha_u$ erhalten wir

$$\int \frac{B_u x + C_u}{(x^2 + 2\alpha_u x + \beta_u)^{n_u}} dx = \int \frac{B_u v + C'_u}{(v^2 + k^2)^{n_u}} dv, \quad (5.146)$$

wobei

$$C'_u = C - B_u \alpha_u \quad \text{und} \quad k^2 = \beta_u - \alpha_u^2 \quad (5.147)$$

sind. Man kann zeigen, daß $k^2 > 0$ ist. Wir definieren

$$\int \frac{B_u v + C'_u}{(v^2 + k^2)^{n_u}} dv = I_1 + I_2, \quad (5.148)$$

wobei

$$I_1 = \int \frac{B_u v}{(v^2 + k^2)^{n_u}} dv \quad \text{und} \quad I_2 = \int \frac{C'_u}{(v^2 + k^2)^{n_u}} dv \quad (5.149)$$

sind. Das Integral I_1 berechnet sich für $n_u = 1$ zu

$$\int \frac{B_u v}{v^2 + k^2} dv = \frac{B_u}{2} \ln(v^2 + k^2). \quad (5.150)$$

Für $n_u \geq 2$ erhält man über die Substitution $z = v^2 + k^2$:

$$\int \frac{B_u v}{(v^2 + k^2)^{n_u}} dv = -\frac{B_u}{2(n_u - 1)} (v^2 + k^2)^{1-n_u}. \quad (5.151)$$

Das Integral I_2 hat für $n_u = 1$ den Wert

$$\int \frac{C'_u}{v^2 + k^2} dv = \frac{C'_u}{k} \arctan\left(\frac{v}{k}\right) \quad (5.152)$$

Für $n_u \geq 2$ läßt sich das Integral I_2 *rekursiv* berechnen:

$$\begin{aligned} \int \frac{C'_u}{(v^2 + k^2)^{n_u}} dv &= \frac{C'_u v}{2(n_u - 1) k^2 (v^2 + k^2)^{n_u - 1}} \\ &+ \frac{(2n_u - 3) C'_u}{2(n_u - 1) k^2} \int \frac{dv}{(v^2 + k^2)^{n_u - 1}} \end{aligned} \quad (5.153)$$

Uneigentliche Integrale

Bisher betrachteten wir nur Integrale vom Typ

$$\int_a^b f(x) dx \quad (5.154)$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$, wobei $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ stetig ist. Beispiele für *uneigentliche Integrale* sind

$$\int_a^\infty f(x) dx \quad (5.155)$$

oder das Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}, \quad (5.156)$$

dessen Integrand $\frac{dx}{\sqrt{x}}$ an der unteren Integrationsgrenze (0) nicht definiert ist.

- Das Integral in Gln. (5.155) ist definiert als

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (5.157)$$

Existiert dieser Grenzwert heißt das Integral *konvergent*. Existiert der Grenzwert nicht, ist das Integral *divergent*.

Als Beispiel betrachten wir

$$\int_0^{\infty} x e^{-\alpha x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x e^{-\alpha x^2} dx. \quad (5.158)$$

Wir substituieren

$$u = -\alpha x^2 \quad (5.159)$$

und erhalten

$$\frac{du}{dx} = -2\alpha x \quad \text{und damit} \quad x dx = -\frac{du}{2\alpha}. \quad (5.160)$$

Also gilt

$$\int x e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{1}{2\alpha} \int e^u du = -\frac{1}{2\alpha} e^u + C = -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha x^2} + C, \quad (5.161)$$

und wir haben

$$\int_0^b x e^{-\alpha x^2} dx = \left[-\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha x^2} \right]_0^b = -\frac{1}{2\alpha} (e^{-\alpha b^2} - 1). \quad (5.162)$$

Für den Grenzwert erhalten wir

$$\int_0^{\infty} x e^{-\alpha x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2\alpha} (e^{-\alpha b^2} - 1) \right] = -\frac{1}{2\alpha}, \quad (5.163)$$

und das Integral ist folglich konvergent.

Divergent ist zum Beispiel

$$\int_0^{\infty} e^x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [e^x]_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (e^b - 1) = \infty. \quad (5.164)$$

Dagegen ist das Integral

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} [e^x]_a^0 = \lim_{a \rightarrow -\infty} (1 - e^a) = 1 \quad (5.165)$$

konvergent.

- Ein Integral

$$\int_a^b f(x) dx, \quad (5.166)$$

wobei $f(a)$ nicht definiert ist, berechnet man als

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx. \quad (5.167)$$

Zum Beispiel ist das Integral in Gln. (5.156) gegeben als

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [2\sqrt{x}]_{\epsilon}^1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (2 - 2\sqrt{\epsilon}) = 2. \quad (5.168)$$

Ein weiteres Beispiel ist

$$\int_0^e (\ln x + 1) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^e (\ln x + 1) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [x \ln x]_{\epsilon}^e = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (e - \epsilon \ln \epsilon) = e, \quad (5.169)$$

da $\ln(\exp(1)) = \ln(e^1) = \ln e = 1$ ist. In Gln. (3.152) haben wir gezeigt, daß

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \ln \epsilon = 0 \quad (5.170)$$

ist.

Zwei divergente Integrale dieser Art sind

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\ln x]_{\epsilon}^1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (-\ln \epsilon) = \infty \quad (5.171)$$

und

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{x} \right]_{\epsilon}^1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(-1 + \frac{1}{\epsilon} \right) = \infty. \quad (5.172)$$

Findet sich im "Inneren" des Intervalles $[a, b]$ eine Stelle q (mit $a < q < b$) für die $f(q)$ nicht definiert ist, berechnet man

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^q f(x) dx + \int_q^b f(x) dx. \quad (5.173)$$

Die beiden Teilintegrale $\int_a^q f(x) dx$ und $\int_q^b f(x) dx$ können dann nach den oben erörterten Verfahren ermittelt werden.

Integration nach Potenzreihenentwicklung

Wie bereits erwähnt, besitzt die Funktion

$$f(t) = e^{-t^2} \quad (5.174)$$

keine analytische Stammfunktion. Folglich kann das Integral

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (5.175)$$

nicht analytisch ausgedrückt werden. Dieses Integral wird benötigt, um die sogenannte *Fehlerfunktion*

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (5.176)$$

zu berechnen.

Um das Integral näherungsweise berechnen zu können, approximieren wir den Integranden durch seine Taylor- oder MacLaurinreihe. Den Integranden in Gln. (5.175) approximieren wir mit Hilfe der MacLaurinreihe (siehe Gln. (3.139))

$$e^z \approx 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!}. \quad (5.177)$$

Mit $z = -t^2$ haben wir dann

$$e^{-t^2} \approx 1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} \quad (5.178)$$

so daß das Integral

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x e^{-t^2} dt \\ &\approx \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} \right) dt \\ &= \left[t - \frac{t^3}{3 \cdot 1!} + \frac{t^5}{5 \cdot 2!} - \frac{t^7}{7 \cdot 3!} + \dots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1) \cdot n!} \right]_0^x \\ &= x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1) \cdot n!}. \end{aligned} \quad (5.179)$$

Für $x = 1$ ist

$$F(1) \approx 1 - \frac{1}{3 \cdot 1!} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1) \cdot n!}. \quad (5.180)$$

Berechnen wir die rechte Seite von Gln. (5.180) für $n = 0, 1, 2, 3, \dots, 10$, erhalten wir

n	$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1) \cdot k!}$
0	1.0000
1	0.6667
2	0.7667
3	0.7429
4	0.7475
5	0.7467
6	0.7468
7	0.7468
8	0.7468
9	0.7468
10	0.7468

Mit vier Dezimalstellen ist also $F(1) = 0.7468$.

Man kann beweisen, daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (5.181)$$

ist, aber das werden wir hier nicht tun. Da die Funktion $\exp(-\alpha t^2)$ gerade ist, ist damit

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha t^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}. \quad (5.182)$$

Deshalb gilt für die oben genannte erf-Funktion

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\operatorname{erf} x) = 1. \quad (5.183)$$

Numerische Integration

Kann die Stammfunktion der Funktion $f(x)$ nicht analytisch ermittelt werden, oder liegt die Funktion nur als eine Tabelle von Wertepaaren $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$, vor, kann das Integral kann das In

$$\int_a^b f(x) dx \quad (5.184)$$

numerisch, das heißt mittels eines Rechners, berechnet werden. Das einfachste Verfahren zur numerischen Integration ist die sogenannte *Trapezregel*. Abbildung 5.7 erklärt das Prinzip. Das Intervall $[a, b]$ wird in n Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$ eingeteilt, wobei

$$x_i = a + i h, \quad h = 0, 1, 2, 3, \dots, n, \quad (5.185)$$

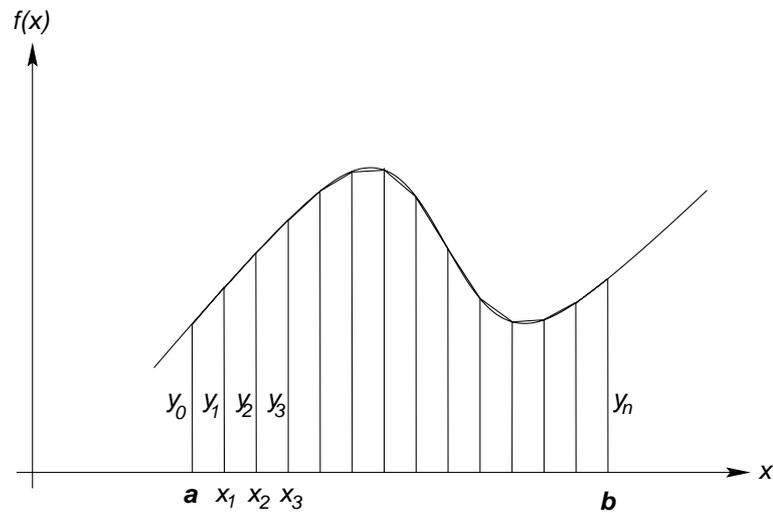


Abbildung 5.7: Das Prinzip der Trapezregel zur Berechnung eines Integrals $\int_a^b f(x) dx$.

ist. Jedes Teilintervall hat die Länge

$$h = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}, \quad (5.186)$$

damit werden

$$a = x_0 \text{ und } b = x_n. \quad (5.187)$$

Wir definieren

$$y_i = f(x_i), \quad h = 0, 1, 2, 3, \dots, n. \quad (5.188)$$

Für das Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ approximieren wir den Flächeninhalt unter der Kurve als den Flächeninhalt des Trapezes mit den Eckpunkten $(x_{i-1}, 0)$, $(x_i, 0)$, (x_i, y_i) und (x_{i-1}, y_{i-1}) , dieser Flächeninhalt ist

$$A_i = h \cdot \frac{y_{i-1} + y_i}{2}. \quad (5.189)$$

Die Gesamtfläche unter der Kurve ist näherungsweise gegeben als

$$\begin{aligned} A &= h \cdot \left(\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \dots + \frac{y_{n-2} + y_{n-1}}{2} + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \right) \\ &= h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right). \end{aligned} \quad (5.190)$$

Also haben wir

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right). \quad (5.191)$$

Die Genauigkeit des Verfahrens wird natürlich besser, je größer n ist. Damit steigt aber auch die benötigte Rechenzeit. Bei der Berechnung eines einzelnen Integrals wäre das normalerweise unerheblich, aber in großen Berechnungen, bei denen sehr viele Integrale benötigt werden, muß unter Umständen ein Kompromiß zwischen Rechengenauigkeit und Rechengeschwindigkeit erreicht werden.

6 Fehlerrechnung

6.1 Fehlertypen

In einem *Meßvorgang* wird der Wert einer Größe mittels *Meßinstrumente* bestimmt. Zum Beispiel können wir mit einem Thermometer die Temperatur einer Flüssigkeit messen. Bei einer Messung können Fehler auftreten. Wir unterscheiden *systematische Fehler* und *zufällige (oder statistische) Fehler*.

- *Systematische Fehler* können zum Beispiel durch eine falsche Eichung oder eine unkorrekte Bedienung der Meßinstrumente verursacht werden. Ein systematischer Fehler verschiebt normalerweise alle Meßwerte in eine bestimmte Richtung. Systematische Fehler sind vermeidbar.
- *Zufällige Fehler* sind unvermeidbar. Auch wenn Messungen mit größter Sorgfalt durchgeführt werden, wird gelegentlich ein Meßwert falsch abgelesen (*Errare humanum est!*). Auch können zufällige Fehler durch Schwankungen der Meßbedingungen (Temperatur und Druck) während der Messung hervorgerufen werden.

Praktisch unterscheidet man *absolute Fehler*, die eine Einheit haben, von *relative Fehler*, die dimensionslos sind (oder in Prozent, Promille, Parts-per-Million, . . . , angegeben werden), Eine Temperatur kann zum Beispiel mit einem absoluten Fehler von 0.2 K oder mit einer relativen Fehler von 0.1% gemessen werden.

6.2 Mittelwert und Fehler der Einzelmessungen

Stellen wir uns vor, daß wir eine Größe x messen. Wir können die Messung beliebig oft wiederholen, und wegen zufälliger Fehler werden wir nicht in jedem Meßvorgang genau denselben Wert von x bestimmen. Mathematisch beschreibt man dieses Verhalten durch eine sogenannte *Verteilungsfunktion* $\varphi(x)$. Wir nehmen an, daß bei jeder neuen Messung die Wahrscheinlichkeit dafür, daß wir einen Wert von x im infinitesimal kleinen Intervall $[x_0, x_0 + dx]$ als Ergebnis erhalten, als

$$dP = \varphi(x_0) dx \quad (6.1)$$

gegeben ist.

Oft wird angenommen, daß $\varphi(x)$ die *Gauss'sche Normalverteilung* (oder die *Gauss'sche Glockenkurve*) ist, das heißt

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x_w)^2}{2\sigma^2}}. \quad (6.2)$$

Diese Funktion, die in der Abbildung 6.1 abgebildet ist, hat die folgenden Eigenschaften:

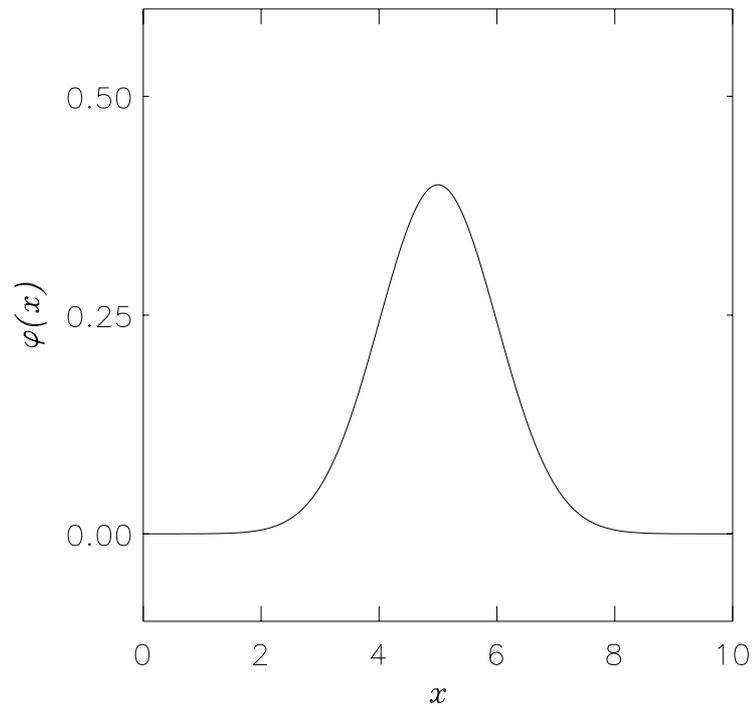


Abbildung 6.1: Die Gauss'sche Glockenkurve (Gln. (6.2)) mit $x_w = 5$ und $\sigma = 1$.

- Sie ist symmetrisch bezüglich $x = x_w$, das heißt $\varphi(x_w + \Delta x) = \varphi(x_w - \Delta x)$. Die Größe x_w ist der *wahre Wert* von x . Gäbe es also keine zufälligen Meßfehler, würde man $x = x_w$ bei jeder Messung von x erhalten.
- Die Größe σ ist die *Standardabweichung*. Sie ist ein Maß für die Breite der Kurve und damit für die typische Abweichung zwischen einem gemessenen Wert von x und x_w .
- Je größer $|x - x_w|$ ist, desto kleiner ist der Funktionswert $\varphi(x)$ und damit die Häufigkeit des Meßwertes x .
- Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1. \quad (6.3)$$

Das heißt, daß die Funktion φ *normiert* ist. Die Gleichung besagt, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, irgendeinen Wert von x zu messen, gleich 1 ist.

Setzen wir voraus, daß wir n Messungen der Größe x durchgeführt haben, und daß wir die Meßwerte (x_1, x_2, \dots, x_n) erhalten haben. Wir nehmen an, daß jede

Messung der Gauss'schen Normalverteilung in Gln. (6.2) unterliegt. Können wir, ausgehend von den Werten (x_1, x_2, \dots, x_n) , die Werte von x_w und σ bestimmen? Ein dogmatischer Mathematiker würde diese Frage mit nein beantworten. In der Praxis können wir nur den sogenannten *wahrscheinlichsten Wert* von x , \bar{x} ("x-quer" genannt), ermitteln.

Gauß hat gezeigt, daß \bar{x} durch Minimierung der *Summe der Fehlerquadrate*

$$S(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2 \quad (6.4)$$

berechnet werden kann. Um die Minimierung durchführen zu können, berechnen wir zunächst

$$\frac{dS}{d\bar{x}} = 2 \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i) = 2 \left(n \cdot \bar{x} - \sum_{i=1}^n x_i \right) \quad (6.5)$$

und

$$\frac{d^2 S}{d\bar{x}^2} = 2n. \quad (6.6)$$

Wir stellen fest, daß für alle Werte von \bar{x}

$$\frac{d^2 S}{d\bar{x}^2} > 0 \quad (6.7)$$

ist. Damit die Funktion $S(\bar{x})$ ein Minimum besitzt, muß dann gelten

$$\frac{dS}{d\bar{x}} = 2 \left(n \cdot \bar{x} - \sum_{i=1}^n x_i \right) = 0. \quad (6.8)$$

Auflösung nach \bar{x} ergibt

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (6.9)$$

Das arithmetische Mittel \bar{x} der einzelnen Meßpunkte x_i ist derjenige Wert, der mit größter Wahrscheinlichkeit x_w entspricht.

Wie schätzen wir die Genauigkeit einer einzelnen Messung ab? Ein mögliches Genauigkeitsmaß ist der *durchschnittliche Fehler*

$$\overline{\Delta x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\Delta x_i| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|. \quad (6.10)$$

wobei

$$\Delta x_i = x_i - \bar{x} \quad (6.11)$$

ist.

Ein besseres Genauigkeitsmaß ist der *mittlere Fehler* einer Einzelmessung, definiert als

$$m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}{n-1}}. \quad (6.12)$$

Diese Größe ist eine Abschätzung der Standardabweichung σ .

Der mittlere Fehler des Mittelwertes, \bar{m} , berechnet sich als

$$\bar{m} = \frac{m}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}{n(n-1)}}. \quad (6.13)$$

Oft schreibt man das Ergebnis einer Meßreihe als $\bar{x} \pm \bar{m}$. Andere Schreibweisen, wie $\bar{x}(\bar{m})$, sind jedoch auch möglich.

6.3 Fehlerfortpflanzung

Stellen wir uns ein Experiment vor, bei dem wir zwei Größen x und y messen. Die Meßwerte werden dazu benutzt, eine weitere Größe $z = f(x, y)$ zu berechnen.

Ein Beispiel wäre das nicht-ideale Gas mit der in Gln. (4.1) gegebenen Zustandsgleichung. Für dieses Gas können wir die Temperatur T und das Volumen V messen und dann den Druck $p(T, V)$ aus Gln. (4.2) berechnen. Hier gelten also $x = T$, $y = V$ und $f(x, y) = p(T, V)$.

Die Frage ist nun: Wie wirken sich die Fehler in x und y auf den Meßfehler von z aus?

Wir betrachten zunächst den Fall, bei dem wir n Messungen von x und y durchgeführt haben. Die Ergebnisse sind (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , \dots , (x_n, y_n) . Für jede Messung berechnen wir

$$z_i = f(x_i, y_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (6.14)$$

und erhalten die Mittelwerte

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (6.15)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, \quad (6.16)$$

und

$$\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i. \quad (6.17)$$

Nun können wir, gemäß Gln. (6.10)-(6.12), den durchschnittlichen Fehler und den mittleren Fehler von x , y und z berechnen. Der durchschnittliche Fehler von x ist in Gln. (6.10) gegeben, und die entsprechenden Fehler von y und z sind

$$\overline{\Delta y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - \bar{y}| \quad (6.18)$$

und

$$\overline{\Delta z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |z_i - \bar{z}|. \quad (6.19)$$

Mit

$$(\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i) = (x_i - \bar{x}, y_i - \bar{y}, z_i - \bar{z}) \quad (6.20)$$

erhalten wir die mittleren Fehler

$$\begin{aligned} & (m_x, m_y, m_z) \\ &= \left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}{n-1}}, \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta y_i)^2}{n-1}}, \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta z_i)^2}{n-1}} \right) \end{aligned} \quad (6.21)$$

Fortpflanzung des Fehlers einer Einzelmessung, Maximaler Fehler

Es kann sein, daß wir nur eine einzelne Messung von x und y durchgeführt haben, aber daß wir die durchschnittlichen Fehler $\overline{\Delta x}$ und $\overline{\Delta y}$ oder die mittleren Fehler m_x und m_y trotzdem kennen, zum Beispiel von früheren Messungen mit demselben Meßgerät. Um den Fehler der Größe $z = f(x, y)$ in diesem Fall abschätzen zu können, benutzen wir das totale Differential

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy. \quad (6.22)$$

Wenn die beiden Größen x und y sich um dx bzw. dy ändern, ändert sich z näherungsweise um dz . Interpretieren wir dx und dy als Fehler von x bzw. y , können wir dz als den Fehler von z interpretieren.

Der maximale absolute Fehler

Manchmal gibt man für z den *maximalen absoluten Fehler* Δz_{\max} an. Er berechnet sich nach

$$\Delta z_{\max} = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \overline{\Delta x} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \overline{\Delta y} \right|. \quad (6.23)$$

Man addiert die Absolutwerte der beiden Summanden auf der rechten Seite von Gln. (6.23). Haben $(\partial f/\partial x)$ und $(\partial f/\partial y)$ entgegengesetzte Vorzeichen, würde eine

Addition der beiden Produkte $(\partial f/\partial x)\overline{\Delta x}$ und $(\partial f/\partial y)\overline{\Delta y}$ zu einer Kompensation der Fehler von x und y führen, da $\overline{\Delta x}$ und $\overline{\Delta y}$ immer positiv sind. Diese Kompensation wird durch die Berechnung der Absolutwerte vermieden.

Beispiel

Wir messen die Kantenlänge x und die Masse y eines Würfels und möchten das spezifische Gewicht

$$z = \frac{y}{x^3} \quad (6.24)$$

bestimmen. Wir können die Kantenlänge x mit einem relativen Fehler von 2% und die Masse y mit einem relativen Fehler von 1% bestimmen. Gleichung (6.23) liefert

$$\Delta z_{\max} = \left| -\frac{3y}{x^4} \right| |\overline{\Delta x}| + \left| \frac{1}{x^3} \right| |\overline{\Delta y}| \quad (6.25)$$

Division durch $z = y/x^3$ ergibt

$$\frac{\Delta z_{\max}}{z} = \left| -\frac{3}{x} \right| |\overline{\Delta x}| + \left| \frac{1}{y} \right| |\overline{\Delta y}| = 3 \left| \frac{\overline{\Delta x}}{x} \right| + \left| \frac{\overline{\Delta y}}{y} \right|. \quad (6.26)$$

Mit $\overline{\Delta x}/x = 0.02$ (das heißt 2%) und $\overline{\Delta y}/y = 0.01$ (das heißt 1%) berechnen wir

$$\frac{\Delta z_{\max}}{z} = 3 \cdot 0.02 + 0.01 = 0.07. \quad (6.27)$$

Der maximale relative Fehler in z ist damit 7%.

Der mittlere absolute Fehler

Der *mittlere absolute Fehler* in z berechnet sich nach dem *Gauss'schen Fehlerfortpflanzungsgesetz*:

$$m_z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} m_x \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} m_y \right)^2}. \quad (6.28)$$

Dabei sind m_x und m_y die mittleren Fehler der Mittelwerte von x bzw. y . Hängt $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ von n Variablen ab, ist der mittlere absolute Fehler

$$m_z = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} m_{x_i} \right)^2}. \quad (6.29)$$

Betrachten wir als Beispiel

$$z(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (6.30)$$

gilt für den mittleren Fehler des Mittelwertes

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{1}{n}, \quad (6.31)$$

und damit

$$\bar{m} = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n m^2} = \frac{1}{n} \sqrt{n \cdot m^2} = \frac{m}{\sqrt{n}}. \quad (6.32)$$

Wir haben also hier Gln. (6.13) hergeleitet.

Index

- Abbildung, 28
- Ableitbarkeit, 55
- Ableitung, 51, 57
 - partiell, 76
 - zweite, 63
- Approximationsfehler, 49
- \arcsin , 47, 62
- Assoziativität, 8

- Basissatz, 23
- Basisvektoren, 23
- Bogenmaß, 34

- Charakteristischer Punkt, 67
- \cos , 31, 54

- Definitionsbereich, 28, 73
 - einfach zusammenhängend, 73
 - mehrfach zusammenhängend, 74
- Differentiationsregeln, 57
- Differenzierbarkeit, 55
- Dimension einer vektoriellen Größe, 6
- 3-Tupel, 6

- Einheitsvektor, 17
- \exp , 35, 57, 62
- Explizite Darstellung, 74
- Exponentialfunktion, 35
- Extremum, 67

- Fehler, 114
 - absolut, 114
 - durchschnittlich, 116
 - Fortpflanzung, 117
 - maximal absoluter, 118
 - mittlerer absoluter, 119
 - relativ, 114
 - systematisch, 114
 - zufällig, 114
- Fehlerrechnung, 114
- Funktion, 28
 - gerade, 31
 - invers, 45, 61
 - mehrerer reeller Veränderlichen, 73
 - rational gebrochen, 103
 - reell, 28, 29
 - reziprok, 41, 59
 - ungerade, 31
 - zusammengesetzt, 43, 60

- Gauss'sche Fehlerfortpflanzungsgesetz, 119
- Gauss'sche Glockenkurve, 114
- Gauss'sche Normalverteilung, 114
- Geradengleichung, 28
 - Punkt-Richtungsform, 13
 - Zweipunkteform, 13
- Glockenkurve, 114
- Grad, 34
- Gram-Schmidt-Orthogonalisierung, 23
- Graph
 - zeichenbar, 30
- Grenzwert, 51, 65, 74

- Höhenlinien, 74
- Homogenes Polynom, 30

- Implizite Darstellung, 74, 81
- Integral, 85

- bestimmt, 88
- unbestimmt, 85
- uneigentlich, 107
- Integration, 85
 - gebrochen rationaler Funktionen, 103
 - Numerisch, 111
 - Partiell, 100
 - Potenzreihenentwicklung, 109
 - Substitution, 98
- Integrationsregeln, 89
- Integrationsvariable, 87
- Integrationsverfahren, 97
- Intervall, 29
 - geschlossen, 29
 - halboffen, 29
 - offen, 29
- Intervallhalbierung, 70
- Inversen-Existenz, 8
- Kettenregel, 60
- Kollinear, 12
- Kommutativität, 8
- Kraft, 8
- Kreuz-Produkt, 20
- lg, 47
- l'Hôpital, 67
- Lineare Unabhängigkeit, 15
- Linearkombination, 23, 58
- Linkssystem, 23
- ln, 47, 57, 62
- \log_{10} , 47
- Lokaler Fehler, 49
- MacLaurin'sche Reihe, 64
- Maximum, 67
- Minimum, 67
- Mittelwert, 90, 96, 114
- Newton-Raphson-Iteration, 70
- Normalverteilung, 114
- Normierung, 24, 115
- n -Tupel, 6
- Null-Existenz, 8
- Nullstelle, 67
- Orthogonalisierung, 23
- Orthogonalität, 19
- Orthonormalität, 24
- Ortsvektor, 6
- Paar, geordnet, 6
- Partialbruchzerlegung, 103
- Partielle Ableitung, 76
- Partielle Integration, 100
- Pfeil, 6
 - frei, 7
 - gebunden, 7
 - Komponenten, 6
- Polynom, 38
 - gerade, 39
 - homogen, 30
 - ungerade, 39
- Potenzfunktion, 34
- Potenzreihenentwicklung, 109
- Produktintegration, 100
- Projektion, 19
- Punkt, charakteristisch, 67
- rad, 34
- Radian, 34
- Rechtssystem, 23
- Satz von Schwarz, 78
- Schmidt-Orthogonalisierung, 23
- Signierter Flächeninhalt, 94
- sin, 28, 31, 53
- Skalare Größe, 5
- Skalarprodukt, 16, 27
- Spatprodukt, 22
- Stammfunktion, 85
- Standardabweichung, 115
- Substitution, 98
- Summe der Fehlerquadrate, 116

\tan , 42, 60

Tangentenapproximation, 51

Tangentenzerlegung, 48

Taylorentwicklung, 63, 64

tg , 42

Totales Differential, 79

Trapezregel, 111

Tripel, 6

Variablentransformation, 82

Vektor, 8, 12

Vektoraddition, 9

Vektorielle Größe, 5

Vektorprodukt, 20, 27

Vektorraum, 12

Vergleichsfunktion, 48

Verteilungsfunktion, 114

Wendepunkt, 67

Wertebereich, 28, 73

Zuordnung, 27

2-Tupel, 6