Prof. Dr. M. Heilmann
Teresa Schnepper, M.Sc.
Bergische Universität Wuppertal

WS 2013/2014

Aufgabensammlung Vorkurs
Mathematik für Studierende technischer Fächer
und für Studierende der Chemie

Aufgabe 1

Es seien A, B, C Aussagen. Prüfen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln die Gültigkeit der folgenden Regeln.

$$\begin{array}{lrcl}
\text{a)} & A \vee (B \vee C) & \Longleftrightarrow & (A \vee B) \vee C \\
\text{b)} & A \vee (B \wedge C) & \Longleftrightarrow & (A \vee B) \wedge (A \vee C) \\
\text{c)} & \neg(\neg A) & \Longleftrightarrow & A \text{ (Doppelte Verneinung)} \\
\text{d)} & \neg(A \wedge B) & \Longleftrightarrow & (\neg A) \vee (\neg B) \\
\text{e)} & \neg(A \vee B) & \Longleftrightarrow & (\neg A) \wedge (\neg B)
\end{array}$$

Aufgabe 2

Seien A, B, C Aussagen. Prüfen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln, ob die folgenden zusammengesetzten Aussagen Tautologien sind.

$$\begin{array}{lrcl}
\text{a)} & (A \wedge (A \Longrightarrow B))) & \Longleftrightarrow & (A \wedge B) \\
\text{b)} & (\neg(A \vee B)) & \Longleftrightarrow & ((\neg A) \wedge (\neg B)) \\
\text{c)} & \neg(A \wedge B) & \Longleftrightarrow & (\neg A) \vee (\neg B) \\
\text{d)} & ((A \wedge B) \Longrightarrow C) & \Longleftrightarrow & (A \Longrightarrow (B \Longrightarrow C))
\end{array}$$

Aufgabe 3

Verneinen Sie die folgenden Aussagen.

a) Alle im März 2013 in Wuppertal zugelassenen Autos der Marke Fiasko verbrauchen mehr als 10 L Benzin pro 100 km Autobahnfahrt.

b) Im Vorkurs Mathematik für Ingenieure an der Uni Wuppertal gibt es einen (zukünftigen) Maschinenbaustudenten, der aus Köln oder Dortmund kommt.

Aufgabe 4

Es seien die Mengen $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{2, 5, 6\}$, $C = \{5, 6, 2\}$ und $D = \{6\}$ gegeben.
Bestimmen Sie die folgenden Mengen:

a) $A \cap B$	b) $A \cup B$	c) $A \setminus B$	d) $B \setminus A$
e) $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$	f) $A \cap D$	g) $A \cup B \cup C \cup D$	

Aufgabe 5

Die Grundmenge Ω sei die Menge aller Schülerinnen und Schüler des Gymnasiums X-Schlau. F sei die Menge aller Schülerinnen, M die Menge aller Schülerinnen und Schüler, deren Lieblingsfach Mathematik ist, C die Menge aller Schülerinnen und Schüler, die im Schulchor singen, B die Menge aller Schülerinnen und Schüler, die das Fach Biologie nicht mögen und T die Menge aller Schülerinnen und Schüler, die in ihrer Freizeit Tennis spielen.
Beschreiben Sie die folgenden Mengen:

a) $\Omega \setminus M$ b) $M \cup C$ c) $F \cap T$ d) $M \setminus (B \cap T)$

Aufgabe 6

Stellen Sie die folgenden Mengen möglichst einfach dar. Verwenden Sie Venn-Diagramme und die Rechenregeln aus der Vorlesung.
A, B, C seien Teilmengen der Grundmenge Ω.

a) $M_1 = [(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)] \cup (A \cap \bar{B})$ b) $M_2 = [(A \cap (\bar{A} \cup B)) \cup (B \cap (B \cup C))] \cup (B \cap C)$

c) $M_3 = \overline{(\bar{A} \cup \bar{B})} \cup (A \cap \bar{B}) \cup \bar{A}$

Aufgabe 7

Stellen Sie die beiden Seiten der Gleichung jeweils in einem Venn-Diagramm dar und entscheiden Sie, ob die Aussage wahr oder falsch ist.
A, B, C seien dabei Teilmengen der Grundmenge Ω.

a) $(\bar{A} \cap C) \cup (\bar{B} \cap C) = \overline{(A \cup B)} \cap C$ b) $\bar{A} \cup (B \cap C) = (\bar{A} \cup B) \cap (\bar{A} \cup C)$

Aufgabe 8

Geben Sie die folgenden Mengen in aufzählender Darstellung an.

a) $\{n^2 \in \mathbb{N} : 3 \leq n \leq 8\}$ b) $\{2n - 1 : n \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq n \leq 5\}$ c) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \wedge \frac{1}{n} \in \mathbb{N}\}$

Aufgabe 9

Geben Sie die folgenden Mengen in beschreibender Darstellung an.

a) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ b) $\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}\right\}$ c) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}\right\}$

Aufgabe 10

Erstellen Sie eine Liste aller möglichen verschiedenen Teilmengen der Menge {a,b,c}.
Wieviele gibt es, wenn die leere Menge und die Menge selbst dazu gehören?
Ebenso für die Menge {a,b,c,d}.

Aufgabe 11

Schreiben Sie die folgenden Mengen als Intervall:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} : 3 \leq x < 4\}$ b) $B = \{x \in \mathbb{R} : 5 \leq x < 19\} \cap \{x \in \mathbb{R} : 13 \leq x < 27\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq 44\}$ d) $D = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : -33 < x < \infty\}$

e) $F = \{x \in \mathbb{R} : x > 5\}$

Aufgabe 12

Seien $A = \{a, b, c, d\}$ und $B = \{1, 2, 3\}$. Bilden Sie das Kreuzprodukt $A \times B$.

Aufgabe 13

Wandeln Sie die Brüche in Dezimalzahlen um.

a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{1}{100}$ c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{7}{4}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{1}{11}$

Aufgabe 14

Wandeln Sie die Dezimalzahlen in Brüche um.

a) $0,75$ b) $0,35$ c) $1,24$

Aufgabe 15

Multiplizieren Sie aus und fassen Sie so weit wie möglich zusammen.

a) $2x^2(3x - 7y) + 3y^2(x^2 - 2y) + 2xy(7x + 3xy)$

b) $(3x + 5y^2z)xy + (2x + 4xy)2z^2 - x(3xy + 5y^3z + 4z^2 + 8yz^2)$

c) $-cd^2(-c + d) + c^2d(c - d)$

d) $t(6u + 7s + 3t^2) - s(7t + 2s - 3u^2) + (-4u^2 - 3su + 6t)u$

Aufgabe 16

Fassen Sie die folgenden Terme mit Hilfe der binomischen Formeln zusammen.

a) $x^2 + 14xy + 49y^2$ b) $4a^2 - 9b^2$ c) $4a^4 - 20a^2b^2 + 25b^4$ d) $2x^4 - 18y^2$

Aufgabe 17

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke. Geben Sie an, welche Werte die Variablen nicht annehmen dürfen.

a) $a^2b^3a^{-1}b^5$ b) $\frac{t^p t^{q-1}}{t^r t^{s-1}}$ c) $\frac{10^2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3}{10^0 \cdot 10^{-2} \cdot 10^5}$ d) $\frac{(k^2)^3 \cdot k^4}{(k^3)^2}$ e) $\frac{(x+1)^2(x+1)^{-2}}{(x+1)^4(x+1)^{-3}}$

Aufgabe 18

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke. Welche Werte dürfen die Variablen annehmen?

a) $\dfrac{c(3b-2a)}{6ab}+\dfrac{4b-5c}{10a}-\dfrac{b(4c-5a)}{10ac}+\dfrac{3b^2+8c^2}{6bc}$

b) $\dfrac{\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}{\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}}$

c) $\dfrac{3s+t}{2s^2+2st}-\dfrac{s^2+t^2}{2s^2t+2st^2}+\dfrac{2s-5t}{4st+4t^2}$

Aufgabe 19

a) 12000 Euro werden mit 4 % Zinsen pro Jahr auf einem Konto angelegt, wobei die am Jahresende fälligen Zinsen jeweils dem Guthaben zugeschlagen werden. Wie hoch ist das Guthaben nach 15 Jahren?

b) Wieviel Geld hätten Sie vor 5 Jahren bei einer Bank mit 6% pro Jahr anlegen müssen, um heute einen Betrag von 50.000 Euro zu erhalten?

Aufgabe 20

a) Der Gewinn eines Unternehmens stieg von 2000 auf 2001 um 20 % und nahm dann von 2001 auf 2002 um 17 % ab. In welchem der Jahre 2000 und 2002 war der Gewinn höher?

b) Bei welcher prozentualen Zunahme von 2000 auf 2001 wären die Gewinne (in etwa) gleich gewesen?

c) Bei welcher prozentualen Abnahme von 2001 auf 2002 wären die Gewinne (in etwa) gleich gewesen?

Aufgabe 21

Für welche Werte von a, x, y $\in \mathbb{R}$ existiert die jeweils angegebene Wurzel?

a) $\sqrt{4+a}$ b) $\sqrt{-3-3y}$ c) $\sqrt{x^2-1}$ d) $\sqrt{-x^2-1}$ e) $\sqrt{1-a^2}$

Aufgabe 22

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke. a, b, x und y seien dabei so gewählt, dass alle auftretenden Terme definiert sind.

a) $\dfrac{(\sqrt{x}-2\sqrt{y})(\sqrt{x}+2\sqrt{y})}{5x-20y}$ b) $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x}}$ c) $(\sqrt{b}-\sqrt{5})^2+(\sqrt{b}+\sqrt{5})^2$

d) $\sqrt{9a^2-6a+1}$ e) $\dfrac{4\sqrt{1+2x}}{\sqrt{1-4x^2}}$ f) $\sqrt{a^2-10a+25}$

Aufgabe 23

Machen Sie die jeweils auftretenden Nenner rational und vereinfachen Sie.

a) $\sqrt{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ b) $4\sqrt{6t}-\dfrac{5t\sqrt{2}}{\sqrt{3t}}$ für $t>0$

c) $\dfrac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ für $a,b>0$ d) $\dfrac{\sqrt{a^3y}}{\sqrt{a^2y}}-\dfrac{y\sqrt{a^4y}}{a\sqrt{ay^3}}$ für $a,y>0$

Aufgabe 24

Fassen Sie so weit wie möglich zusammen. Zum Teil sind die binomischen Formeln zu verwenden. Geben Sie an, für welche Werte der Variablen der Term definiert ist.

$$\text{a)}\ \sqrt[8]{x^2y\sqrt[4]{y^{12}}} \qquad \text{b)}\ \sqrt[4]{(x+1)^8}\cdot\sqrt[4]{x+1} \qquad \text{c)}\ \frac{12-20\sqrt{s}}{\sqrt{36+120\sqrt{s}+100s}}\cdot\frac{(3+5\sqrt{s})^2}{9-25s}$$

Aufgabe 25

Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

$$\text{a)}\ \log_5 25 \qquad \text{b)}\ \lg 0.001 \qquad \text{c)}\ \log_{17} 1 \qquad \text{d)}\ \log_2\left(\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[5]{2^3}\right) \qquad \text{e)}\ \log_8 \frac{1}{\sqrt{8}}$$

Aufgabe 26

Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke als Summen bzw. Differenzen und Produkte bzw. Quotienten.

$$\text{a)}\ \log_3(3x) \qquad \text{b)}\ \log_5\left(\frac{5a}{y}\right) \qquad \text{c)}\ \lg\left(\frac{\sqrt{a}\cdot b^2}{\sqrt[4]{c}}\right) \qquad \text{d)}\ \lg\left(\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[4]{b}}{\sqrt[10]{c}}\right)^{10} \qquad \text{e)}\ \lg\left(\frac{5\sqrt{x^2}\cdot(\sqrt[6]{y})^3}{\sqrt{a\sqrt{b}}}\right)$$

Aufgabe 27

Schreiben Sie die folgenden Terme mit nur einem Logarithmus auf.

$$\text{a)}\ 2\log_5 u + 3\log_5 v \qquad \text{b)}\ \lg(a+b)+\lg(a+b)^2-\frac{1}{2}\lg a-\frac{1}{3}\lg b$$

$$\text{c)}\ \frac{1}{3}\log_2 x+\frac{2}{3} \qquad \text{d)}\ \log_4(x^2-1)-\log_4(x-1)-\log_4(x+1)^2$$

$$\text{e)}\ \left[(\log_4 x^2):(\log_4 x)\right]-2 \qquad \text{f)}\ \left[\left(\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{b}\right):\left(\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{b}\right)\right]\cdot\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\text{g)}\ 2\lg a-\lg\frac{a}{a^2+1}-\lg a^3$$

Aufgabe 28

Formen Sie die folgenden Terme so um, dass sie mit einem Taschenrechner berechnet werden können.

$$\text{a)}\ \log_4 130-\log_3 20 \qquad \text{b)}\ \log_{\frac{1}{3}} 234+\lg 93-\log_2 92$$

Aufgabe 29

Schreiben Sie die folgenden Terme als Summe.

$$\text{a)}\ \ln\left(\sqrt[4]{\frac{a^3b}{c^2d}}\right)\quad \text{mit}\quad a,b,c,d>0 \qquad \text{b)}\ \ln\left(\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\right)\quad\text{mit}\quad x>0$$

Aufgabe 30

Überlegen Sie, wie man die Werte $\sin(45°) = \cos(45°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ mit Hilfe geeigneter geometrischer Überlegungen ermitteln kann.

Aufgabe 31

Schreiben Sie mit Hilfe des Summenzeichens.

a) $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100$

b) $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \frac{1}{125}$

c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9}$

d) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9}$

Aufgabe 32

Berechnen Sie die folgenden Summen.

a) $\sum_{i=3}^{10} i(i-1)$ b) $\sum_{j=1}^{5} (-2)^j$ c) $\sum_{l=-2}^{2} \sqrt{l^2}$ d) $\sum_{k=0}^{3} (x+1)^k$

Aufgabe 33

Berechnen Sie.

a) $3!$ b) $4!$ c) $5!$ d) $\binom{20}{5}$

e) $\binom{403}{3}$ f) $\binom{10}{5} - \binom{11}{5}$ g) $\dfrac{\binom{102}{27}}{\binom{100}{26}}$

Aufgabe 34

Berechnen Sie die Summen mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes.

a) $(a+2)^5$ b) $(2x-3)^4$

Aufgabe 35

Verwenden Sie zur Berechnung den binomischen Lehrsatz. Dabei sind a, b jeweils speziell zu wählen.

a) $\sum_{i=0}^{100} \binom{100}{i} (-1)^i$ b) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i$ c) $\sum_{l=0}^{n} \binom{n}{i}$ d) $\sum_{j=0}^{10} \binom{10}{j} 2^j$ e) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$

Aufgabe 36

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge der folgenden quadratischen Gleichungen in $\mathbb{R}$.

a) $x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{1}{5} = 0$ b) $2x(x-1) + 6 = 4(x+1)$ c) $11x - 3 = 30x^2$

d) $7x^2 = 8x$ e) $4x^2 + 4 = 8x$ f) $-9x^2 = 1 + 6x$

Aufgabe 37

a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung

$$\text{i) } x^2 + 3x + a = 0 \qquad \text{ii) } x^2 + ax + 4 = 0$$

genau eine, zwei, gar keine Lösung?

b) Geben Sie eine quadratische Gleichung an, deren Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$ ist.

Aufgabe 38

Bestimmen Sie jeweils den Definitionsbereich und die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen.

a) $\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{x^2 - x + 1}$ b) $\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{x^2 - x + 1}$ c) $\sqrt{x^2 - 2x + 2} = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$

d) $x = \sqrt{3x + 10}$ e) $\sqrt{x + \sqrt{x + 16}} = 2$ f) $\sqrt{1 + \sqrt{x}} = \sqrt{x - 1}$

Aufgabe 39

Bestimmen Sie jeweils den Definitionsbereich und die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen.

a) $\dfrac{x-2}{2x+2} = \dfrac{x^2 - x - 1}{x+1} - \dfrac{x}{x+1}$ b) $\dfrac{x^2}{x+1} + \dfrac{x-3}{x^2-1} = \dfrac{x^2}{x-1}$ c) $2 - \dfrac{10x - 13}{x - 2} = \dfrac{x^2 + x + 1}{2 - x}$

Aufgabe 40

Geben Sie jeweils die Definitionsmenge der folgenden Logarithmusgleichungen an und lösen sie diese.

a) $\lg x = 3$ b) $\lg x = \dfrac{1}{3}$ c) $\log_2 x = \dfrac{3}{2}$ d) $3 \lg x = 1$

e) $\lg(3x) = \dfrac{1}{2}$ f) $\lg x = \lg 3 - \lg 2$ g) $\lg x + \lg(4x) = 2$ h) $\lg x - \lg \sqrt{x} = 2 \lg 2$

Aufgabe 41

Lösen Sie die folgenden Exponentialgleichungen.

a) $4^x = 64$ b) $5^x = 10$ c) $3^{x-1} = 7$

d) $2^{x-2} - 2^{x+1} = 14$ f) $9 \cdot 2^{x+3} - 4 \cdot 3^x - 3^{x+1} = 9(3^x - 2^x)$

Aufgabe 42

Geben Sie für die folgenden Gleichungen jeweils den Definitionsbereich an und bestimmen Sie die Lösungsmengen mit Hilfe geeigneter Substitutionen.

a) $a^4 - 13a^2 + 36 = 0$ b) $w^4 - 5w^2 + 4 = 0$ c) $y^3 - y^6 = 1$

d) $x^{-2} - 2x^{-1} = 15$ e) $2^{x+1} - 4^x - 1 = 0$ f) $\ln(3s^6 - 1) - \ln(s^6) = 0$

Aufgabe 43

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen. Achten Sie genau auf die nötigen Fallunterscheidungen.

a) $|x - 7| = 2$ b) $|3x + 6| = x$ c) $|3x - 5| = 2|x + 2|$ d) $|x - 4| + |2 - x| = 2$

Aufgabe 44

a) Berechnen Sie den Wert der folgenden Determinanten

$$\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 6 & -8 \end{vmatrix}$$

b) Wie muss man $x \in \mathbb{R}$ wählen, damit die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 4 \end{vmatrix} = 0$$

erfüllt wird?

Aufgabe 45 Lösen Sie folgende Gleichnungssysteme mittels der Cramerschen Regel:

$$\begin{array}{rcrcl} \frac{x}{2} & - & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 3 \end{array}, \qquad \begin{array}{rcrcr} x & - & 3y & = & 3 \\ \frac{x}{3} & - & y & = & -5 \end{array}, \qquad \begin{array}{rcrcr} 2x & - & y & = & 7 \\ -x & + & \frac{y}{2} & = & -\frac{7}{2} \end{array}$$

Aufgabe 46

Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & & & & & = & 1 \\ & - & 4x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ & - & 6x_2 & + & 7x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 20 \end{array}$$

Aufgabe 47

Lösen Sie folgende lineare Gleichungssysteme:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 12 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 6x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 16 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ x_1 & - & x_2 & & & = & 2 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 15 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & & & = & 0 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

Aufgabe 48

Für eine reelle Zahl α sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & \alpha x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ \alpha x_1 & + & 3x_2 & + & \alpha x_3 & = & -2 \end{array}$$

gegeben. Für welche Werte von α hat dieses System keine, genau eine bzw. unendlich viele Lösungen? Bestimmen Sie auch für jeden Fall die zugehörigen Lösungsmengen.

Aufgabe 49

Geben Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen.

a) $-x-3 \leq 5$ b) $3x+5 < x-13$ c) $3y-(y-1) \geq y-(1-y)$

d) $\dfrac{2a-4}{3} \leq 7$ e) $\dfrac{1}{3}(1-x) \geq< 2(x-3)$ f) $\dfrac{t}{24}-(t+1)+\dfrac{3t}{8} < \dfrac{5}{12}(t+1)$

Aufgabe 50

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden quadratischen Ungleichungen.

a) $x^2-\dfrac{4}{3}x+2 \leq 2x+1$ b) $-x^2+2x \geq 35$ c) $4x^2+25 > 20x$

Aufgabe 51

Geben Sie die Definitionsmengen und die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen an.

a) $\dfrac{y}{y+5} \geq -4$ b) $\dfrac{x}{x+5} \leq -4$ c) $\dfrac{3u+25}{u+3} \geq 2u-5$

Aufgabe 52

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen. Führen Sie gegebenenfalls eine geeignete Substitution durch.

a) $e^x+e^{2x} \leq 1$ b) $2+x^4+x^2 \geq 0$ c) $\ln(x^2)-\ln(x-1) \geq 0$

Aufgabe 53

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen.

a) $|2x-1| \leq 4$ b) $|1-0.5x| \geq x+4$ c) $|x-2| \geq |4-3x|+1$

d) $|-2x-3| > |x+1|+4$ e) $2|x+2|-|x-1|+|x+1| > 0$

Aufgabe 54

Entscheiden Sie, ob die folgenden Ungleichungen für alle $x \in \mathbb{R}$ bzw. für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gültig sind. (Mit Begründung!)

a) $x+1 > x$ b) $x^2 > x$ c) $x+x > x$ d) $x^2+y^2 \geq 2xy$

Aufgabe 55

Skizzieren Sie im $\mathbb{R}^2$ die Punktmengen, die durch die folgenden Ungleichungen beschrieben werden.

a) $x-y < 0$ b) $y \leq x^2$ c) $|x| \leq |y|$

d) $x^2+y^2 \leq 4$ e) $(x-1)^2+(y+1)^2 \leq 4$

Aufgabe 56

Gegeben sei die lineare Funktion $y = -\dfrac{4}{7}x+4$

a) Zeichnen Sie die zugehörige Gerade in ein Koordinatensystem.

b) Wo schneidet die Gerade die x-Achse und die y-Achse?

c) Zeigen Sie durch Umformung, dass man die Geradengleichung auch in der Form $\frac{x}{7} + \frac{y}{4} = 1$ angeben kann.
Was fällt Ihnen auf? Können Sie eine allgemeine Regel angeben?

Aufgabe 57

Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden

a) die durch den Punkt $P\left(-\frac{2}{3}, \frac{7}{11}\right)$ verläuft und die Steigung $a = \frac{1}{3}$ besitzt.

b) die die Steigung $a = -\frac{1}{2}$ besitzt und die x-Achse bei 5 schneidet.

c) die parallel zu der Geraden durch die Punkte $P(-72, -60)$ und $Q(-24, -20)$ verläuft und durch den Ursprung geht.

Aufgabe 58

Bestimmen Sie jeweils (falls möglich) die gemeinsamen Punkte der Geraden mit den Gleichungen

a) $y = -2x + 8$ und $-y + 3x = 7$ b) $y = \frac{3}{2}x + 2$ und $y = \frac{3}{2}x - 5$ c) $y = \frac{3}{7}x + 0.5$ und $y - \frac{5}{10} = \frac{9}{21}x$

Wie lässt sich an den Funktionstermen ablesen, ob zwei Geraden keine gemeinsamen Punkte besitzen?

Aufgabe 59

Es sei $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$.

a) Erstellen Sie eine Wertetabelle für $x \in [-4, 2]$ für ganzzahlige Werte von x.

b) Skizzieren Sie den zugehörigen Graphen mit Hilfe der in a) ermittelten Werte.

c) Bestimmen Sie rechnerisch die Nullstellen von f.

d) Bestimmen Sie rechnerisch den Scheitelpunkt von f.

Aufgabe 60

Bestimmen Sie für jede der folgenden quadratischen Funktionen die Scheitelpunktform und (falls möglich) die Nullstellenform.

a) $f_1(x) = x^2 + 4x$ b) $f_2(x) = x^2 + 6x + 18$ c) $f_3(x) = -3x^2 + 30x - 30$
d) $f_4(x) = 9x^2 - 6x - 44$ e) $f_5(x) = -x^2 - 200x + 30000$ f) $f_6(x) = x^2 + 100x - 20000$

Aufgabe 61

Gegeben seien die beiden Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \text{ und } g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{21}{2}\,.$$

a) Zeichnen Sie die zugehörigen Graphen in ein Koordinatensystem.

b) Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten der Schnittpunkte.

Aufgabe 62

Sei $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. Bestimmen Sie alle Nullstellen und geben Sie die faktorisierte Darstellung an. Für welche Werte von x ist $P(x)$ positiv, für welche negativ?

Aufgabe 63

Sei $P(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$. Bestimmen Sie die vollständige Faktorisierung von $P(x)$ und bestimmen Sie die Mengen $\{x \in \mathbb{R} : P(x) \geq 0\}$ und $\{x \in \mathbb{R} : P(x) \leq 0\}$.

Aufgabe 64

Bestimmen Sie alle Nullstellen von $P(x) = 4x^4 + 4x^3 - 49x^2 - x + 12$.

Aufgabe 65

Sei

$$f(x) = \frac{2x^5 - 15x^4 + 36x^3 - 26x^2 - 6x + 9}{-2x^3 + 6x^2 + 2x - 6}.$$

a) Bestimmen Sie die faktorisierten Darstellungen des Zähler- und des Nennerpolynoms und bestimmen Sie daraus die “gekürzte Funktion” $g(x)$.

b) Bestimmen Sie sämtliche Null- und Polstellen der “gekürzten Funktion” $g(x)$.

c) Zerlegen Sie $g(x)$ in eine Summe aus einem Polynom und einer rationalen Funktion, deren Zählergrad kleiner ist als ihr Nennergrad.

Aufgabe 66

Bestimmen Sie den Definitionsbereich und das asymptotische Verhalten für $x \to \pm\infty$ für die Funktionen

$$\text{a) } f(x) = \frac{2x^3 + x}{x^2} \qquad \text{b) } g(x) = \frac{x^3 + x + 1}{x + 2}$$

Aufgabe 67

Zeichnen Sie die Exponentialfunktion $f(x) = 3^x$. Wie erhält man den Graphen der Funktion g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 aus dem Graphen von f? Skizzieren Sie die folgenden Funktionen.

$$g_1(x) = 3^x + 1 \qquad g_2(x) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 3^x \qquad g_3(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

$$g_4(x) = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x \qquad g_5(x) = 3^{x-1}$$

Aufgabe 68

Jede Exponentialfunktion $f(x) = a^x,\ a > 0$, kann mit der Basis e in der Form $f(x) = e^{kx}$ dargestellt werden. Wie ist dabei k zu wählen?

Aufgabe 69

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen die Funktionswerte an den Stellen $-1, 0$ und 1.
Skizzieren Sie dann den ungefähren Verlauf der Funktionsgraphen. Welche der Funktionen sind bzgl. der y-Achse symmetrisch zueinander?

a) $f_1(x) = 2^x$ b) $f_2(x) = 1.5 \cdot 2^{-x}$ c) $f_3(x) = \frac{1}{2^x}$

d) $f_4(x) = 3^{-x}$ e) $f_5(x) = \frac{1}{2} \cdot 3^x$ f) $f_6(x) = \frac{1}{2} \cdot 3^{-x}$

Aufgabe 70

Gegeben sei die Funtionenschar f_k mit $f_k(x) = x - ke^x$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass sich zwei Funktionen der Schar mit verschiedenen Werten für k nicht schneiden.

Aufgabe 71

Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge der folgenden Logarithmusfunktionen.

$$f_1(x) = \ln(\sqrt{x}) \qquad f_2(x) = \ln(cx), c < 0 \qquad f_3(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$f_4(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \qquad f_5(x) = \ln\left(\frac{c^2}{x}\right), c \neq 0$$

Aufgabe 72

Zeichnen Sie die Logarithmusfunktion $f(x) = \ln(x)$. Wie erhält man die Graphen der Funktionen g_1, g_2, g_3, g_4 aus dem Graphen von f? Skizzieren Sie die folgenden Funktionen.

$$g_1(x) = \ln(x) + 1 \qquad g_2(x) = \ln(x - 1) \qquad g_3(x) = \ln(-x) \qquad g_4(x) = -\ln(-x)$$

Aufgabe 73

Bestimmen Sie Definitionsbereich und Nullstellen der folgenden Funktionen.

$$f_1(x) = \sqrt{\ln(1-x)} - e \qquad f_2(x) = \ln(x)(\ln(x) - 3) \qquad f_3(x) = x^3 \ln(x^3)$$

$$f_4(x) = e^x \cdot \ln(x) - e^x - \ln(x) + 1 \qquad f_5(x) = \ln(5x^2) - 4\ln(\sqrt{x}) - 3 \qquad f_6(x) = \ln(2e^{2x-3}) - \ln(e^{-x})$$

Aufgabe 74

Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen

$$g_1(x) = 3\sin(x) \qquad g_2(x) = \sin(3x) \qquad g_3(x) = 3 + \sin(x) \qquad g_4(x) = \sin(x + 3)$$

und vergleichen Sie diese mit dem Graphen von $g(x) = \sin(x)$.

Aufgabe 75

Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\cos(x) \qquad f_2(x) = \cos(\tfrac{1}{2}x) \qquad f_3(x) = \frac{1}{2} + \cos(x) \qquad f_4(x) = \cos(x + \tfrac{1}{2})$$

und vergleichen Sie diese mit dem Graphen von $f(x) = \cos(x)$.

Aufgabe 76
Bestimmen Sie die Nullstellen der folgenden Funktionen.

$$g_1(x) = \sin\left(\tfrac{1}{2}x^2\right) \qquad g_2(x) = \cos\left(x - \tfrac{\pi}{4}\right) \qquad g_3(x) = \tan(x-1) \qquad g_4(x) = \cos\left(\tfrac{\pi}{4}x\right)$$

Aufgabe 77
Zeichnen Sie die Betragsfunktion $f(x) = |x|$. Wie erhält man den Graphen der Funktion g aus dem Graphen von f? Skizzieren Sie die folgenden Funktionen.

$$g_1(x) = |x-2| \qquad g_2(x) = |x+2| \qquad g_3(x) = 2|x-2| \qquad g_4(x) = |x+2| - 3 \qquad g_5(x) = |\frac{1}{2}x|$$

Aufgabe 78
Zeichnen Sie jeweils die gegebene Funktion f sowie die zugehörige Betragsfunktion $g(x) = |f(x)|$ in ein Koordinatensystem. Wie entsteht g aus f?

$$f_1(x) = 2x \qquad f_2(x) = x^2 - x - 2 \qquad f_3(x) = -3^x + 2 \qquad f_4(x) = (x-2)^3 \qquad f_5(x) = \ln(x-1)$$

Aufgabe 79
Geben Sie das Bildungsgesetz der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an.

a) $2, -2, 2-2, 2, ...$ b) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, ...$

c) $1, 3, 7, 15, 31, 63, ...$ d) $1, 4, 27, 256, 3.125, 46.656, ...$

Aufgabe 80
Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz.

a) $a_n = -\frac{2}{n}$ b) $a_n = \frac{n^2-1}{n}$ c) $a_n = (-1)^n n^2$ d) $a_n = 4^n$

Aufgabe 81
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^4-16}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^4-81}{x^3-3x^2+2x-6}$ **c)** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-2x^5+3x^2-1}{5x^5-x+10}$.

Aufgabe 82
Bestimmen Sie folgende Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+5}{n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7n-20n^2+3}{4n^2-11n+2}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-10^{50}n^2}{n^3+1}$

Aufgabe 83

Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $f\colon \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 2x + x^2 & \text{für} \quad x \in [0,1], \\ ax - x^3 + x & \text{für} \quad x \in (1,2), \\ \dfrac{b(x^{5-a} - x - 1)}{x^2 + 1} & \text{für} \quad x \in [2,3], \end{cases}$$

auf $\mathbb{D}_f = [0,3]$ stetig ist.

Aufgabe 84

Ist die Funktion $f\colon \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$ mit $\mathbb{D}_f = [-9, \infty)$ und

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ \frac{1}{7} & \text{für x} = 0, \end{cases}$$

stetig im ganzen Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$?